

1

(1)

$$\begin{aligned} y &= -2\sin 2x + 2\cos 2x + 3 \\ &= 2\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right) + 3 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{4}\pi &\leq 2x + \frac{3}{4}\pi \leq \frac{7}{4}\pi \end{aligned}$$

であることから、 $\sin\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right)$ は、

$$2x + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi, \text{つまり、} x = \frac{3}{8}\pi \text{のとき最小値 } -1$$

$$2x + \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi, \text{つまり、} x = 0 \text{のとき最大値 } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

をとる。これより、関数 $y = -2\sin 2x + 2\cos 2x + 3$ は

$$x = \frac{3}{8}\pi \text{のとき最小値 } -2\sqrt{2} + 3$$

$$x = 0 \text{のとき最大値 } 5$$

をとる。

(答) 最大値 5, 最小値 $-2\sqrt{2} + 3$

(2)

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ の分母について

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$$

であるから、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ が有限な値になるためには、分子について

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+3}-8) = 0$$

が成り立つ必要がある。このとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+3}-8) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a-8 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 4 \end{aligned}$$

となる。一方、 $a=4$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{x+3}-8}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4\sqrt{x+3}-8)(4\sqrt{x+3}+8)}{(x-1)(4\sqrt{x+3}+8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16(x+3)-64}{(x-1)(4\sqrt{x+3}+8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16(x-1)}{(x-1)(4\sqrt{x+3}+8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16}{4\sqrt{x+3}+8} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+3}-8}{x-1}$ は有限な値になる。

(答) $a=4$, 極限値 1

(3)

一次変換 f を表す行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とする。 f が点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に移すとする、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と点 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ が直線 $y=x$ に関して対称であることから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。 xy 平面上のすべての点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について、①, ②が成り立つことから

$$a=0, b=1, c=1, d=0$$

となる。よって、 f を表す行列 A は、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。次に、一次変換 g を表す行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、合成変換 $f \circ g$ を表す行列が、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h \\ e & f \end{pmatrix}$$

で与えられることに注意すると、題意より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e+4f \\ 2g+4h \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2g+2h \\ 2e+2f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{cases} 2e+4f=4 \\ 2g+4h=6 \\ 2g+2h=-12 \\ 2e+2f=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=2 \\ f=0 \\ g=-15 \\ h=9 \end{cases}$$

となるから、 g を表す行列 B は、

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$$

である。

(答) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$

(4)

$$\begin{aligned} \int x \log(x+1) dx &= \int \left\{ \frac{1}{2}(x+1)(x-1) \right\} \log(x+1) dx \\ &= \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) - \int \left\{ \frac{1}{2}(x+1)(x-1) \right\} \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1) dx \\ &= \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) + C \\ &= \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

(答) $\int x \log(x+1) dx = \frac{x^2-1}{2} \log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C$ (C は積分定数)

(1)

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{a^2 + 9} \\
\Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}|^2 &= a^2 + 9 \\
\Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2 - 6\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 9|\overrightarrow{OB}|^2 &= a^2 + 9 \\
\Leftrightarrow a^2 - 6\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 9 \cdot 1^2 &= a^2 + 9 \quad (\because |\overrightarrow{OA}| = a, |\overrightarrow{OB}| = 1) \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

(2)

点 Q は線分 OP 上に存在するため、 $\overrightarrow{OQ}$ はある実数 k を用いて

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OQ} &= k\overrightarrow{OP} \\
&= k(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\
&= 2k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

とかける。一方、点 Q は線分 AB 上に存在するため、 $\overrightarrow{OQ}$ はある実数 t を用いて、

$$\overrightarrow{OQ} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{3}$$

とかける。 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は一次独立であるから、②、③より

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} 2k = t \\ k = 1 - t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OQ}$ は、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \quad \dots \textcircled{4}$$

と表すことができる。

(答) $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

(3)

点 R は線分 BQ の中点であることから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OR} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OQ}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

と表すことができる。

(答) $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

(4)

 $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{AB}$ が垂直になるとき、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}|\overrightarrow{OB}|^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1^2 &= 0 \\
\Leftrightarrow a^2 &= 2 \\
\Leftrightarrow a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)
\end{aligned}$$

となる。次に、④より、点 Q は線分 AB を 1:2 に内分する点であり、また、点 R は線分 BQ の中点であることから、 $AQ:QR:RB=1:1:1$ となる。これより

$$\triangle OQR = \frac{1}{3} \triangle OAB$$

となる。また、①より $OA \perp OB$ であることが分かり、

$$\begin{aligned}
\triangle OAB &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned}
\triangle OQR &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}$$

である。

(答) $a = \sqrt{2}, \triangle OQR = \frac{\sqrt{2}}{6}$

3

(1)

$$f(x) = -x^2 + 12$$

とおくと、曲線 C_1 の方程式は $y = f(x)$ で与えられ、

$$f'(x) = -2x$$

であることから、曲線 C_1 上の x 座標が a である点 P における接線 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= -2a(x-a) + (-a^2 + 12) \\ &= -2ax + a^2 + 12 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l: y = -2ax + a^2 + 12$$

(2)

接線 l の y 切片は $a^2 + 12 (> 0)$ であり、 x 切片は

$$\begin{aligned} 0 &= -2ax + a^2 + 12 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a^2 + 12}{2a} (> 0) \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

より $\frac{a^2 + 12}{2a}$ である。よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 12) \cdot \frac{a^2 + 12}{2a} \\ &= \frac{(a^2 + 12)^2}{4a} \end{aligned}$$

として表せる。また、 S を a について微分すると、

$$\begin{aligned} S' &= \frac{2(a^2 + 12) \cdot 2a \cdot 4a - (a^2 + 12)^2 \cdot 4}{(4a)^2} \\ &= \frac{(a^2 + 12)\{16a^2 - 4(a^2 + 12)\}}{(4a)^2} \\ &= \frac{(a^2 + 12)(12a^2 - 48)}{(4a)^2} \\ &= \frac{3(a^2 + 12)(a+2)(a-2)}{4a^2} \end{aligned}$$

となる。これより、 $a > 0$ において a の関数 S の増減表は以下のようになる。

a	0	...	2	...
S'		-	0	+

S				
-----	---	---	--	---

これより、 S は $a = 2$ で最小値をとり、その値は

$$\begin{aligned} S &= \frac{(2^2 + 12)^2}{4 \cdot 2} \\ &= 32 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{(a^2 + 12)^2}{4a}, \quad a = 2 \text{ のとき最小値 } 32$$

(3)

接線 $l: y = -2ax + a^2 + 12$ と曲線 $C_2: y = x^2 - 10x + 29$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} -2ax + a^2 + 12 &= x^2 - 10x + 29 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2(a-5)x - a^2 + 17 &= 0 \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

を満たす。接線 l と曲線 C_2 が 2 個の共有点をもつのは、 x の 2 次方程式①の判別式 D において $D > 0$ であるときである。よって、求める a の値の範囲は

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-5)^2 - (-a^2 + 17) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2 - 10a + 8 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a-4) &> 0 \\ \Leftrightarrow 0 < a < 1, 4 < a \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 < a < 1, 4 < a$$

(4)

(3)の結果より、 $0 < a < 1, 4 < a$ のもとで考える。接線 l と曲線 C_2 の共有点の x 座標を x_1, x_2 とすると、これらは①の 2 つの解であるから、解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 = -2(a-5)$$

が成り立つ。よって、2 個の共有点の中点の座標を (X, Y) とすると、

$$\begin{aligned} X &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &= 5 - a \\ Y &= \frac{(-2ax_1 + a^2 + 12) + (-2ax_2 + a^2 + 12)}{2} \\ &= -a(x_1 + x_2) + a^2 + 12 \\ &= 2a(a-5) + a^2 + 12 \\ &= 3a^2 - 10a + 12 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} X &= 5 - a \\ Y &= 3(5 - X)^2 - 10(5 - X) + 12 \\ &= 3X^2 - 20X + 37 \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $0 < a < 1, 4 < a$ であることから

$$X < 1, 4 < X < 5$$

である。以上より、求める軌跡は

$$y = 3x^2 - 20x + 37 \quad (x < 1, 4 < x < 5)$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 3x^2 - 20x + 37 \quad (x < 1, 4 < x < 5)$$

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt = 2\sin x - x + b \quad \dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq a \leq \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

①より

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)f(t)dt &= 2\sin x - x + b \\ \Leftrightarrow x \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt &= 2\sin x - x + b \end{aligned}$$

である。両辺を x について微分すると

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) &= 2\cos x - 1 \\ \Leftrightarrow \int_a^x f(t)dt &= 2\cos x - 1 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となり、これが必要である。③の両辺を x で微分すると

$$f(x) = -2\sin x \quad \dots \textcircled{4}$$

となり、これが必要である。③に $x=a$ を代入すると

$$\begin{aligned} \int_a^a f(t)dt &= 2\cos a - 1 \\ \Leftrightarrow 0 &= 2\cos a - 1 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\pi}{3} \quad (\because \textcircled{2}) \end{aligned}$$

となり、これが必要である。また、①に $x=a$ を代入すると

$$\begin{aligned} \int_a^a (x-t)f(t)dt &= 2\sin a - a + b \\ \Leftrightarrow 0 &= 2\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + b \\ \Leftrightarrow b &= \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

となり、これが必要である。ここで、実際に①が成立しているか、十分性を確認する。

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^x (x-t)(-2\sin t)dt = -2x \int_{\frac{\pi}{3}}^x \sin tdt + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^x t \sin tdt$$

ここで C は積分定数として

$$\begin{aligned} \int t \sin tdt &= \int t(-\cos t)'dt \\ &= -t \cos t + \int \cos tdt \\ &= -t \cos t + \sin t + C \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^x (x-t)(-2\sin t)dt &= -2x \int_{\frac{\pi}{3}}^x \sin tdt + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^x t \sin tdt \\ &= 2x \left[\cos t \right]_{\frac{\pi}{3}}^x + 2 \left[-t \cos t + \sin t \right]_{\frac{\pi}{3}}^x \\ &= 2x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) + 2 \left\{ (-x \cos x + \sin x) - \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= 2\sin x - x + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

となって、実際にこれで十分であることが確認された。

(1)

上より

$$\int_a^x f(t)dt = 2\cos x - 1$$

である。

$$(\text{答}) \int_a^x f(t)dt = 2\cos x - 1$$

(2)

上より

$$f(x) = -2\sin x$$

である。

$$(\text{答}) f(x) = -2\sin x$$

(3)

上より

$$a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

である。

$$(\text{答}) a = \frac{\pi}{3}, b = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$$

(4)

④より、 $f(x) = -2\sin x$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^3 dx &= -8 \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^3 x dx \\ &= -8 \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x (1 - \cos^2 x) dx \\ &= -8 \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x dx + 8 \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x \cdot \cos^2 x dx \\ &= -8 \left[-\cos x \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} + 8 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= -8 \cdot (-1) + 8 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^3 dx = \frac{16}{3}$$