

1

(1)

$t = a^x$ とおくと、 $a > 0$ より t は常に正である。このとき、与えられた不等式は、

$$\begin{aligned} a^{2x} - a^x - 6 &< 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - t - 6 &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < t < 3 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

と変形できる。 $t = a^x$ であるから、

$$\begin{aligned} 0 < t < 3 \\ \Leftrightarrow 0 < a^x < 3 \end{aligned}$$

である。したがって、底 a と 1 との大小関係に注意すると、

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 \text{ のとき } x &> \log_a 3 \\ 1 < a \text{ のとき } x &< \log_a 3 \end{aligned}$$

であることが分かる。

(答) $0 < a < 1$ のとき $x > \log_a 3$, $1 < a$ のとき $x < \log_a 3$

(2)

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} \\ &= \sqrt{2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{19} \end{aligned}$$

である。ここで、 AP が $\angle BAC$ の二等分線であることから、

$$\begin{aligned} BP : CP &= AB : AC \\ \therefore BP : CP &= 2 : 5 \end{aligned}$$

が成り立つため、

$$\begin{aligned} BP &= \frac{2}{7} BC \\ &= \frac{2}{7} \sqrt{19} \end{aligned}$$

である。

(答) $BP = \frac{2\sqrt{19}}{7}$

(3)

以下において、すべての玉を区別して考える。玉の選び方の総数は、異なる 9 個の玉の中から異なる 2 個の玉を選ぶ場合の数に等しく、

$${}_9C_2 \text{ 通り}$$

である。

[1] 取り出す玉が赤玉 0 個、白玉 2 個のとき

このとき、赤玉の選び方は、

$${}_4C_0 \text{ 通り}$$

存在し、白玉の選び方は、

$${}_5C_2 \text{ 通り}$$

存在するため、この確率は、

$$\frac{{}_4C_0 \times {}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{5}{18}$$

である。

[2] 取り出す玉が赤玉 1 個、白玉 1 個のとき

このとき、赤玉の選び方は、

$${}_4C_1 \text{ 通り}$$

存在し、白玉の選び方は、

$${}_5C_1 \text{ 通り}$$

存在するため、この確率は、

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_1}{{}_9C_2} = \frac{5}{9}$$

である。

[3] 取り出す玉が赤玉 2 個、白玉 0 個のとき

このとき、赤玉の選び方は、

$${}_4C_2 \text{ 通り}$$

存在し、白玉の選び方は、

$${}_5C_0 \text{ 通り}$$

存在するため、この確率は、

$$\frac{{}_4C_2 \times {}_5C_0}{{}_9C_2} = \frac{1}{6}$$

である。

以上、[1], [2], [3] より、赤玉の出る個数の期待値は

$$0 \cdot \frac{5}{18} + 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{9}$$

である。

(答) $\frac{8}{9}$

(1)

正四面体の底面は一辺の長さが a である正三角形であるから、面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

(2)

正四面体の各頂点を A, B, C, D とし、点 A から $\triangle BCD$ に下ろした垂線の足を点 P とすると、図形の対称性より点 P は $\triangle BCD$ の重心となる。よって、線分 BP の長さは、辺 CD の中点を M とすると

$$\begin{aligned} BP &= \frac{2}{3} BM \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} a \end{aligned}$$

となる。よって、求める正四面体の高さ AP は、 $\triangle ABP$ が直角三角形であることから、三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{AB^2 - BP^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} a \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{6}}{3} a$$

(3)

正四面体の体積を V とすると、(1), (2)の結果より

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S \cdot AP \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 \end{aligned}$$

となる。一方、題意より $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = 2$$

3. 7

(1)

点 G は△ ABC の重心であることから、平面上の任意の点 O に関して

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

が成り立つ。 $\vec{a} = \overrightarrow{GA}, \vec{b} = \overrightarrow{GB}, \vec{c} = \overrightarrow{GC}$ より

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OG} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3 \cdot \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)

(2)

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -9 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} = -3 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

とする。①, ②より

$$\begin{aligned} (2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) &= -12 \\ \Leftrightarrow 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{c} \cdot \vec{a} &= -12 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= -4 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot (-\vec{a}) &= -4 \quad (\because \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}) \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}| &= 2 \end{aligned}$$

となる。また、①より、

$$\begin{aligned} 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= -9 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= -9 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot (-\vec{b}) + \vec{a} \cdot (-\vec{a}) &= -9 \quad (\because \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}) \\ \Leftrightarrow -|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 &= -9 \\ \Leftrightarrow -|\vec{b}|^2 - 4 &= -9 \quad (\because |\vec{a}|^2 = 4) \\ \Leftrightarrow |\vec{b}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow |\vec{b}| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{5}$$

(3)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ のとき、①より

$$\begin{aligned} 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= -9 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (-2) + \vec{c} \cdot (\vec{b} + \vec{a}) &= -9 \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = -2) \\ \Leftrightarrow \vec{c} \cdot (-\vec{c}) &= -5 \quad (\because \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}) \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow |\vec{c}| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。また、①, ②より

$$\begin{aligned} (2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) &= -12 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= -4 \\ \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} &= -2 \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = -2) \end{aligned}$$

となり、①より

$$\begin{aligned} 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= -9 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} &= -9 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} &= -3 \end{aligned}$$

となる。よって、△ ABC の 3 辺の長さは

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{|\vec{b} - \vec{a}|^2} \\ &= \sqrt{|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2} \\ &= \sqrt{(-\sqrt{5})^2 - 2 \cdot (-2) + 2^2} \\ &= \sqrt{13} \\ BC &= \sqrt{|\vec{c} - \vec{b}|^2} \\ &= \sqrt{|\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2 \cdot (-3) + (\sqrt{5})^2} \\ &= 4 \\ CA &= \sqrt{|\vec{a} - \vec{c}|^2} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2} \\ &= \sqrt{2^2 - 2 \cdot (-2) + (\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad AB = \sqrt{13}, BC = 4, CA = \sqrt{13}$$

3. 7

(1)

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義され、数列 $\{b_n\}$ が $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ で定義されるとき

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - 3a_1 \\ &= 3 - 3 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_{n+2} - 3a_{n+1}) - (a_{n+1} - 3a_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - b_n &= 0 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} &= b_n \end{aligned}$$

から、数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 0$ の定数列となる。よって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad b_n = 0$$

(2)

①より

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 3a_n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 3a_n \\ \Leftrightarrow a_n &= 3^{n-1}a_1 \\ \Leftrightarrow a_n &= 3^{n-1} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 3^{n-1}$$

(3)

②より

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n ka_k x^{k-1} \\ &= 1 \cdot 3^0 \cdot x^0 + 2 \cdot 3^1 \cdot x^1 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} S_n &= 1 \cdot 3^0 \cdot x^0 + 2 \cdot 3^1 \cdot x^1 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} \\ 3x \cdot S_n &= 1 \cdot 3^1 \cdot x^1 + 2 \cdot 3^2 \cdot x^2 + \dots + (n-1) \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} + n \cdot 3^n \cdot x^n \end{aligned}$$

となり、辺々差を取ると

$$\begin{aligned} (1-3x)S_n &= 1 \cdot 3^0 \cdot x^0 + 1 \cdot 3^1 \cdot x^1 + \dots + 1 \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1} - n \cdot 3^n \cdot x^n \\ &= \sum_{k=1}^n (3x)^{k-1} + n \cdot 3^n \cdot x^n \end{aligned}$$

となり、 $x \neq \frac{1}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} (1-3x)S_n &= \frac{1-(3x)^n}{1-3x} - n \cdot 3^n \cdot x^n \quad (\because 3x \neq 1) \\ \therefore S_n &= \frac{1-(3x)^n}{(1-3x)^2} - \frac{n(3x)^n}{1-3x} \quad (\because 1-3x \neq 0) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1-(3x)^n}{(1-3x)^2} - \frac{n(3x)^n}{1-3x}$$

(1)

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx$ を x で微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

となり、 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (3t^2 - 2at + b)(x-t) + t^3 - at^2 + bt \\ &= (3t^2 - 2at + b)x - 2t^3 + at^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = (3t^2 - 2at + b)x - 2t^3 + at^2$$

(2)

$a=1, b=-1$ のとき、 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 - 2t - 1)x - 2t^3 + t^2$$

となる。これが点 $(-1, 1)$ を通るとき

$$\begin{aligned} 1 &= (3t^2 - 2t - 1) \cdot (-1) - 2t^3 + t^2 \\ \Leftrightarrow t(t^2 + t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= 0, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。この異なる 3 つの t の値が $y = f(x)$ のグラフと接線の接点の x 座標に対応し、またこの 3 本の接線は互いに異なる。よって、条件を満たす接線は 3 本存在する。

$$(\text{答}) \quad \text{接線の本数: 3 本, 接点の } x \text{ 座標: } 0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

(3)

$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(t, f(t))$ における接線の傾きは、

$$f'(t) = 3t^2 - 2at + b$$

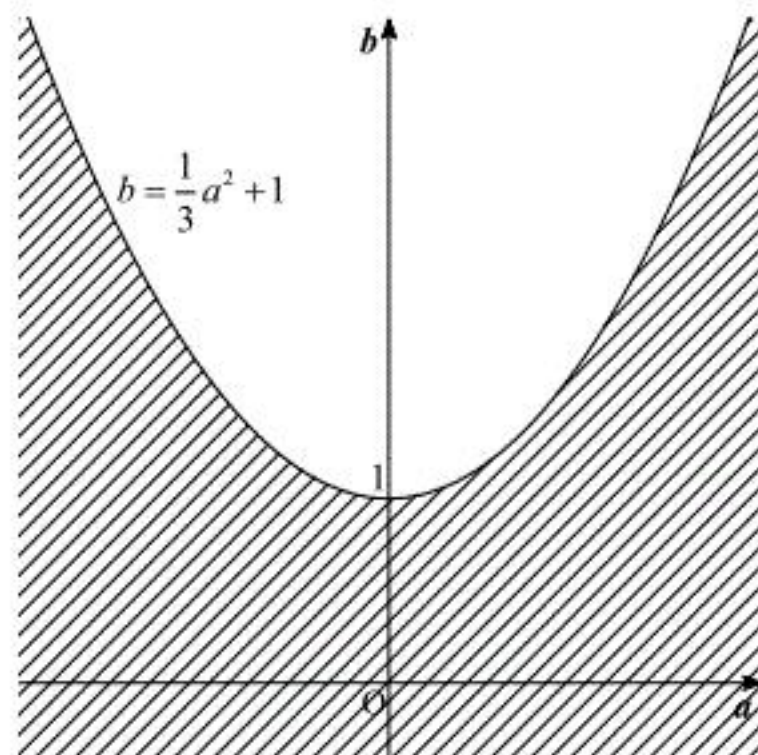
で与えられる。この傾きが 1 となるとき、

$$\begin{aligned} 3t^2 - 2at + b &= 1 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 2at + (b-1) &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $y = f(x)$ のグラフは共通接線をもつことがなく、ゆえに $y = f(x)$ 上の異なる 2 点でのそれぞれの接線は一致しない。よって、 $y = f(x)$ のグラフが傾き 1 の接線をちょうど 2 本持つとき、①を満たす実数 t の値がちょうど 2 つ存在する。このとき、①を t の 2 次方程式と見ると、異なる 2 つの実数解を持つ場合に当たるから、満たすべき条件は 2 次方程式①の判別式を D として

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow (-a)^2 - 3(b-1) &> 0 \\ \Leftrightarrow b &< \frac{1}{3}a^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。これを満たす実数の組 (a, b) は座標平面上に図示すると下図のようになる。ただし、境界線は含まない。



(1)

$$\begin{aligned} xy + y^2 + xz + yz &= (x+y)y + (x+y)z \\ &= (y+x)(y+z) \end{aligned}$$

となる。

(答) $(y+x)(y+z)$

(2)

(1)の結果を利用して

$$ab + b^2 + ac + bc = (b+a)(b+c) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 a, b, c ($a < b < c$) は連続した自然数であることから

$$a = b-1, c = b+1$$

と表すことができる。このとき、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} ab + b^2 + ac + bc &= (2b-1)(2b+1) \\ &= 4b^2 - 1 \end{aligned}$$

となるが、 b は2以上の自然数であるから、 $4b^2$ は4の倍数であり、 $4b^2 - 1$ を4で割った余りは3となる。したがって、 $ab + b^2 + ac + bc$ を4で割った余りは3であることが示された。

(証明終)

(3)

(1)の結果を利用して

$$\begin{aligned} a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 + 2abc &= (a^2b + a^2c + ab^2 + abc) + (b^2c + bc^2 + ac^2 + abc) \\ &= a(ab + ac + b^2 + bc) + c(b^2 + bc + ac + ab) \\ &= (c+a)(ab + b^2 + ac + bc) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

となる。 a, b, c ($a < b < c$) は連続した自然数であることから

$$a = b-1, c = b+1$$

と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned} a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 + 2abc &= (2b-1)(2b+1) \cdot 2b \\ &= (2b-1) \cdot 2b \cdot (2b+1) \end{aligned}$$

となり、 $a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 + 2abc$ は連続した3つの自然数 $2b-1, 2b, 2b+1$ の積である。連続した3つの自然数の中には少なくとも1つずつ2の倍数と3の倍数が含まれることから、それらの積は6の倍数となる。よって、 $a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 + 2abc$ は6の倍数であることが示された。

(証明終)