

1

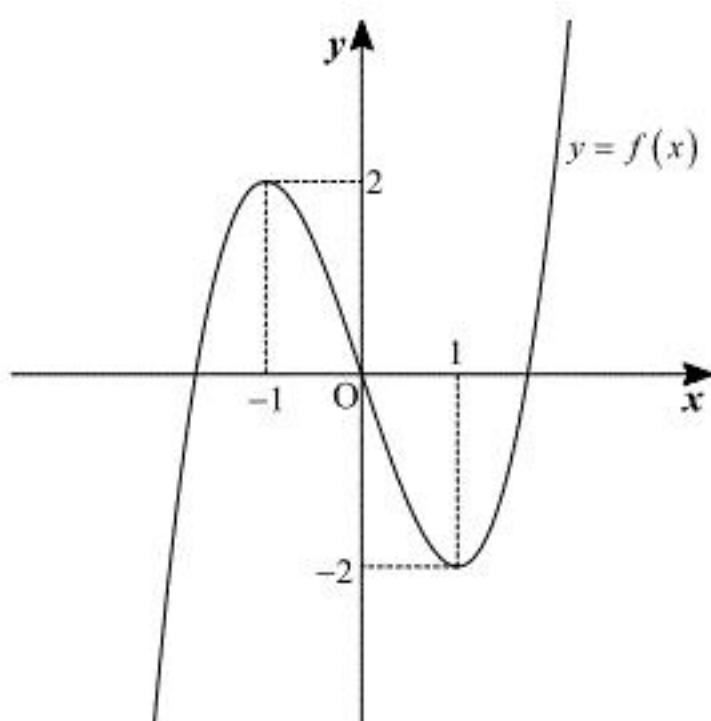
(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

であり、 $f(-1)=2$ 、 $f(1)=-2$ より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって、 $x=-1$ のとき極大値 2 、 $x=1$ のとき極小値 -2 を取る。したがって、 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

①の条件より、2次関数 $g(x)$ は下に凸の放物線である。②の条件と合わせると、

$$g(x) = a(x-1)^2 - 2 \quad (a > 0)$$

と書ける。 $f(0)=0$ より、③の条件から、

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x-1)^2 - 2 \\ &= 2x^2 - 4x \end{aligned}$$

となる。

(答) $g(x) = 2x^2 - 4x$

(3)

$-1 \leq x \leq 0$ のとき $|g(x)| = g(x)$ 、 $0 < x \leq 1$ のとき $|g(x)| = -g(x)$ より、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |g(x)| dx &= \int_{-1}^0 g(x) dx + \int_0^1 \{-g(x)\} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(答) 4

(1)

直線 l は 2 点 $A(3, 2)$, $B(1, 3)$ を通るため、式は

$$y = \frac{2-3}{3-1}(x-3)+2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

(2)

(1)より、点 X の座標は $X(7, 0)$ 、点 Y の座標は $Y\left(0, \frac{7}{2}\right)$ とわかる。 $AX:AY$ は点 A, X の x 座標の差と点 A, Y の x 座標の差に等しいため、

$$AX:AY = 4:3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AX:AY = 4:3$$

(3)

$PX:PY = AX:AY$ を満たすような点 $P(x, y)$ は、(3)より

$$PX:PY = AX:AY$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-7)^2 + y^2} : \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2} = 4:3$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x-7)^2 + y^2} = 4\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9\{(x-7)^2 + y^2\} = 16\left\{x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2\right\} \left(\because (x-7)^2 + y^2 > 0, x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 18x - 16y - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+9)^2 + (y-8)^2 = 180$$

を満たす。したがって、点 P は中心 $(-9, 8)$ 、半径 $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ の円の軌跡を描く。

$$(\text{答}) \quad (x+9)^2 + (y-8)^2 = 180$$

(4)

$2x+y=k$ とおくと、直線 $2x+y=k$ が(3)で求めた円に接するとき最大値、最小値を取る。したがって、円に接するとき、円の中心 $(-9, 8)$ と直線の距離が円の半径 $6\sqrt{5}$ に一致するため、直線と点の距離の公式より、

$$\frac{|2 \cdot (-9) + 8 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 6\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow |k+10| = 30$$

$$\Leftrightarrow k = 20, -40$$

となる。したがって、最大値は 20、最小値は -40 となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } 20, \text{ 最小値 } -40$$

3

(1)

$\vec{a} = (2, 1, 0), \vec{b} = (5, 2, -1)$ より,

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= \sqrt{5^2 + 2^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{30} \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{(2, 1, 0) \cdot (5, 2, -1)}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{12}{\sqrt{5} \sqrt{30}} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{30}, \cos \angle AOB = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} \sin \angle AOB &= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5} \right)^2} \quad (\because \sin \angle AOB > 0) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{30} \cdot \frac{1}{5} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \triangle OAB = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(3)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} \\ &= s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c} \\ &= (2s + 5t - 1, s + 2t + 5, -t - 1) \end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{CP}$ は平面 S と垂直なので, $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{OB}$, すなわち $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow 5s + 12t &= -3 \\ \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2s + 5t &= -1 \\ \therefore s &= -3, t = 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad s = -3, t = 1$$

(4)

(3)より, $\overrightarrow{CP} = (-2, 4, -2)$ であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CP}| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。したがって, 四面体 $OABC$ の体積は, $\triangle OAB$ を底面とみなせば $|\overrightarrow{CP}|$ が高さとなるから, (2)より

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 2$$

となる。

(答) 2