

1

(1)

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{a} + t\vec{b} \\ &= (-2-t, 1+t, 2)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}|\vec{p}| &= \sqrt{(-2-t)^2 + (1+t)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{2\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $t = -\frac{3}{2}$ のとき最小値 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ を取る。

(答) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(2)

$$\begin{aligned}4x - 3y + 3 &= 0 && \cdots \textcircled{1} \\ x - 4y + 4 &= 0 && \cdots \textcircled{2} \\ 3x + y - 14 &= 0 && \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

について、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の交点をAとおくと、

$$\begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x = 0, y = 1$$

となるから、A(0, 1)となる。つぎに、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ の交点をBとおくと、

$$\begin{cases} 4x - 3y + 3 = 0 \\ 3x + y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x = 3, y = 5$$

となるから、B(3, 5)となる。つぎに、 $\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ の交点をCとおくと、

$$\begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ 3x + y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore x = 4, y = 2$$

となるから、C(4, 2)となる。したがって、 $\overline{AB} = (3, 4)$ 、 $\overline{AC} = (4, 1)$ となるから、求めるべき三角形の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{25 \cdot 17 - 16^2} \\ &= \frac{13}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{13}{2}$

(3)

ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}z^2 &= 4\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi\right)^2 \\ &= 4\left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi\right) \\ &= 2(\sqrt{3} - i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z^{-3} &= \frac{1}{8}\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi\right)^{-3} \\ &= \frac{1}{8}\left\{\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{11}{4}\pi\right)\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{16}(1 + i)\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\left|z - \frac{1}{z}\right|^2 &= \left|2\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi\right) - \frac{1}{2}\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi\right)^{-1}\right|^2 \\ &= \left|2\left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi\right) - \frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right\}\right|^2 \\ &= \left|\frac{3}{2}\cos \frac{11}{12}\pi + \frac{5}{2}i \sin \frac{11}{12}\pi\right|^2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{11}{12}\pi + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{11}{12}\pi \\ &= \frac{9}{4}\left\{\sin^2 \frac{11}{12}\pi + \cos^2 \frac{11}{12}\pi\right\} + 4 \sin^2 \frac{11}{12}\pi \\ &= \frac{9}{4} + 2 \cdot \left(1 - \cos \frac{11}{6}\pi\right) \\ &= \frac{17}{4} - \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $z^2 = 2(\sqrt{3} - i)$ 、 $z^{-3} = -\frac{\sqrt{2}}{16}(1 + i)$ 、 $\left|z - \frac{1}{z}\right|^2 = \frac{17}{4} - \sqrt{3}$

(4)

$\det B = 1 - (-2) = 3 \neq 0$ より、 B の逆行列は存在し、

$$B^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}B^{-1}AB &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}(B^{-1}AB)^n &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

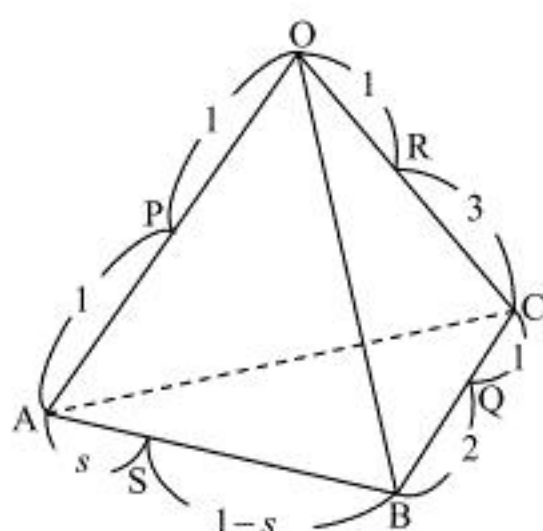
となる。また、 $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}A^n &= B(B^{-1}AB)^n B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \cdot 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^{n+1} + 5^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答) $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ 、 $(B^{-1}AB)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$ 、 $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \cdot 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^{n+1} + 5^n \end{pmatrix}$

(1)



$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

(2)

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\vec{c}, \overrightarrow{OS} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} \\ &= (1-s)\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{RS} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$$

(3)

線分 PQ と線分 RS が交わる時、その交点を T とおくと、実数 k, l を用いて、

$\overrightarrow{PT} = k\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RT} = l\overrightarrow{RS}$ とおける。このとき、 $\overrightarrow{OT}$ を 2 通りの方法で表すと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + k\overrightarrow{PQ} \\ &= \frac{1-k}{2}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}k\vec{c} \\ \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RT} \\ &= \frac{1}{4}\vec{c} + l\overrightarrow{RS} \\ &= l(1-s)\vec{a} + ls\vec{b} + \frac{1-l}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから、それぞれの係数は等しい。したがって、

$$\begin{cases} \frac{1-k}{2} = l(1-s) \\ \frac{k}{3} = ls \\ \frac{2}{3}k = \frac{1-l}{4} \end{cases}$$

となる。これを解いて、

$$s = \frac{1}{7}, k = \frac{1}{5}, l = \frac{7}{15}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{7}$$

3

(1)

$$f'(x) = -2e^{-2x}$$

より、点 $(1, f(1))$ における接線の式は

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= -2e^{-2}x + 3e^{-2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 x 軸との交点 $P_1(x_1, 0)$ の x 座標 x_1 は

$$\begin{aligned} 0 &= -2e^{-2}x_1 + 3e^{-2} \\ \therefore x_1 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_1 = \frac{3}{2}$$

(2)

点 $(x_n, f(x_n))$ における接線の式は

$$\begin{aligned} y &= f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \\ &= -2e^{-2x_n}x + (2x_n + 1)e^{-2x_n} \end{aligned}$$

となる。したがって、 x 軸との交点 $P_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ の x 座標 x_{n+1} は

$$\begin{aligned} 0 &= -2e^{-2x_n}x_{n+1} + (2x_n + 1)e^{-2x_n} \\ \therefore x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これと(1)の結果より、数列 $\{x_n\}$ は初項 $x_1 = \frac{3}{2}$ 、公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であることが分かるので、

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3}{2} + (n-1)\frac{1}{2} \\ &= \frac{n}{2} + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{n}{2} + 1$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 3^k x_k &= \sum_{k=1}^n 3^k \left(\frac{k}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \cdot 3^k + \sum_{k=1}^n 3^k \end{aligned}$$

となる。ここで、 $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot 3^k$ とおくと、

$$S_n = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^n \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$3S_n = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^n + n \cdot 3^{n+1} \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となるから、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} -2S_n &= 3 + 3^2 + \cdots + 3^n - n \cdot 3^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n 3^k - n \cdot 3^{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore S_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 3^k + \frac{n \cdot 3^{n+1}}{2}$$

となる。したがって、

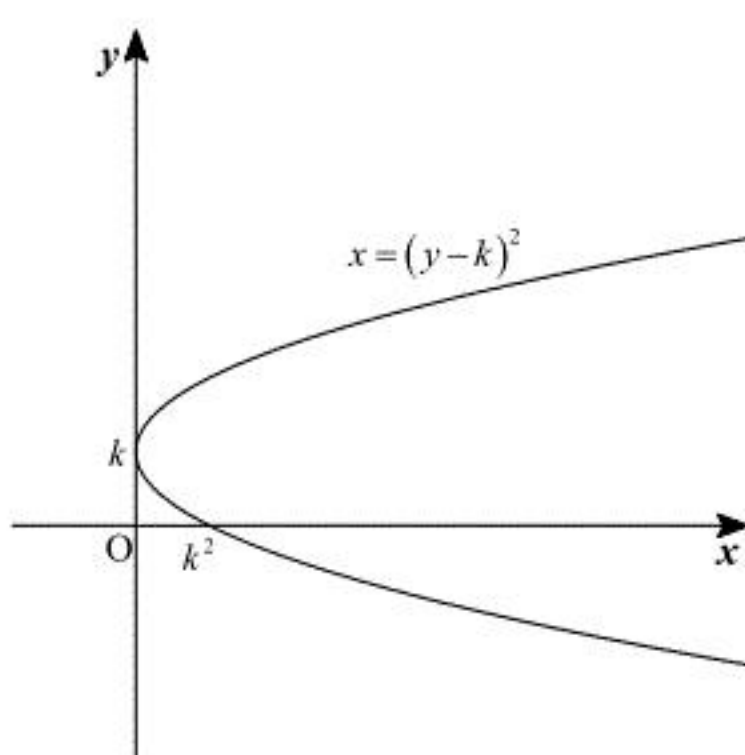
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 3^k x_k &= \frac{1}{2} S_n + \sum_{k=1}^n 3^k \\ &= \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n 3^k + \frac{n \cdot 3^{n+1}}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3(1-3^n)}{1-3} + \frac{n \cdot 3^{n+1}}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(n + \frac{3}{2} \right) 3^n - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n 3^k x_k = \frac{3}{4} \left(n + \frac{3}{2} \right) 3^n - \frac{9}{8}$$

(1)

$x = (y - k)^2$ より、曲線 C の概形は以下ようになる。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned} f(t) &= \{(t - k)^2 - k^2\}^2 + (t - 0)^2 \\ &= t^2(t^2 - 4kt + 4k^2 + 1) \end{aligned}$$

より、

$$f'(t) = 2t(2t^2 - 6kt + 4k^2 + 1)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t(2t^2 - 6kt + 4k^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ または } 2t^2 - 6kt + 4k^2 + 1 = 0$$

となる。ここで、 $t = 0$ は 2 次方程式 $2t^2 - 6kt + 4k^2 + 1 = 0$ の解ではない。したがって、 $2t^2 - 6kt + 4k^2 + 1 = 0$ の実数解と $t = 0$ の解をあわせたものが $f'(t) = 0$ の解となる。2 次方程式 $2t^2 - 6kt + 4k^2 + 1 = 0$ の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 9k^2 - 2(4k^2 + 1) \\ &= k^2 - 2 \end{aligned}$$

となるから、 $k > 0$ とあわせて、

$$D > 0 \Leftrightarrow k > \sqrt{2} \text{ のとき異なる 2 つの実数解を持つ}$$

$$D = 0 \Leftrightarrow k = \sqrt{2} \text{ のとき重解となる}$$

$$D < 0 \Leftrightarrow 0 < k < \sqrt{2} \text{ のとき解なし}$$

を得る。したがって、以上より、

$$k > \sqrt{2} \text{ のとき 3 個}$$

$$k = \sqrt{2} \text{ のとき 2 個}$$

$$0 < k < \sqrt{2} \text{ のとき 1 個}$$

となる。

(答) $k > \sqrt{2}$ のとき 3 個、 $k = \sqrt{2}$ のとき 2 個、 $0 < k < \sqrt{2}$ のとき 1 個

(3)

(2)より、 $k = 2$ のとき $f'(t) = 0$ の解は 3 個となる。このとき、

$$f'(t) = 2t(2t^2 - 12t + 17)$$

$$2t^2 - 12t + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となるから、 $f(t)$ の増減表は以下ようになる。

t	...	0	...	$3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

したがって、 $f(t)$ は $t = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき極大値をとる。ここで、

$$\begin{aligned} f(t) &= t^4 - 8t^3 + 17t^2 \\ &= (2t^2 - 12t + 17) \left(\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{7}{4} \right) - 4t + \frac{119}{4} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} f\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -4\left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{119}{4} \\ &= \frac{71}{4} + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{71}{4} + 2\sqrt{2}$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int \log(1+x) dx &= \int (1+x)' \log(1+x) dx \\
 &= (1+x) \log(1+x) - \int (1+x) \cdot \frac{1}{1+x} dx \\
 &= (1+x) \log(1+x) - x + C
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \int \log(1+x) dx = (1+x) \log(1+x) - x + C$$

(2)

(1)と区分解法より、

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \\
 &= \int_0^1 f(x) dx \\
 &= \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 \\
 &= 2 \log 2 - 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) 2 \log 2 - 1$$

(3)

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x f(x-1) - x \\
 &= x \log x - x
 \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \\
 &= \log x
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $g(x)$ の増減表は、

x	0	...	1	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$			極小	

となる。よって、 $g(x)$ は $x=1$ のときに最小値をとり、その値は $g(1)=-1$ である。

$$(\text{答}) \text{ 最小値: } -1 (x=1)$$