

1

(1)

2 次方程式 $3x^2 + 7x + 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{7}{3} \\ \alpha\beta = \frac{5}{3} \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)\{(\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta\}}{\alpha\beta} \\ &= -\frac{28}{45} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{28}{45}$

(2)

真数条件より

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x - 7 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore x > \frac{7}{2}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \log_9(x + 4) &= \log_3(2x - 7) + \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow \frac{\log_3(x + 4)}{\log_3 9} &= \log_3(2x - 7) + \log_5 5^{-\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_3(x + 4) &= \log_3(2x - 7) - \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \log_3(x + 4) &= \log_3 \frac{(2x - 7)^2}{27} \end{aligned}$$

より、対数の底が $3(>1)$ で同じであるから、

$$\begin{aligned} x + 4 &= \frac{(2x - 7)^2}{27} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 55x - 59 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(4x - 59) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{59}{4} \left(\because x > \frac{7}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = \frac{59}{4}$

(3)

$\cos A = \frac{3}{5}, \cos B = \frac{2}{3}$ より、

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} \\ &= \frac{4}{5} \quad (\because \sin A > 0) \\ \sin B &= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (\because \sin B > 0) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin(\pi - A - B) \\ &= \sin(A + B) \\ &= \sin A \cos B + \sin B \cos A \\ &= \frac{8 + 3\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

となる。したがって、正弦定理より外接円の半径を R とおくと、

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{\sin C} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{38}{5}}{\frac{8 + 3\sqrt{5}}{15}} \\ &= \frac{57}{8 + 3\sqrt{5}} \\ &= \frac{57(8 - 3\sqrt{5})}{(8 + 3\sqrt{5})(8 - 3\sqrt{5})} \\ &= 3(8 - 3\sqrt{5}) \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $3(8 - 3\sqrt{5})$

(1)

1, 2, 3, 4, 5, 6の中から異なる4つの数字を選び、それを小さい順に並べたものを a, b, c, d とすればよい。したがって、 ${}_6C_4$ 通りあり、全体の場合の数は 6^4 通りあることに注意して、求める確率は

$$\frac{{}_6C_4}{6^4} = \frac{5}{432}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{432}$$

(2)

余事象である「異なるものが4種類となる」確率を求める。これは1, 2, 3, 4, 5, 6の中から数字を選んで4個並べる場合の数に等しいから ${}_6P_4$ 通りある。したがって、確率は

$$\frac{{}_6P_4}{6^4} = \frac{5}{18}$$

となる。したがって、求めたい「異なるものが3種類以下となる」確率は

$$1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{13}{18}$$

(3)

異なるものの数で場合分けする。

[1] 1つと3つの場合

このとき、 a, b, c, d のうちどの数字を1つにするかの選び方が4通り存在し、数字の選び方は

$$6 \cdot 5 = 30$$

(通り)存在する。したがって、この場合の数は

$$4 \cdot 30 = 120$$

(通り)ある。

[2] 2つと2つの場合

このとき、 a, b, c, d を2つずつの組に分ける分け方は ${}_4C_2$ 通り存在し、数字の選び方は ${}_6C_2$ 通り存在する。したがって、この場合の数は

$${}_4C_2 \cdot {}_6C_2 = 90$$

(通り)存在する。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{120 + 90}{6^4} = \frac{35}{216}$$

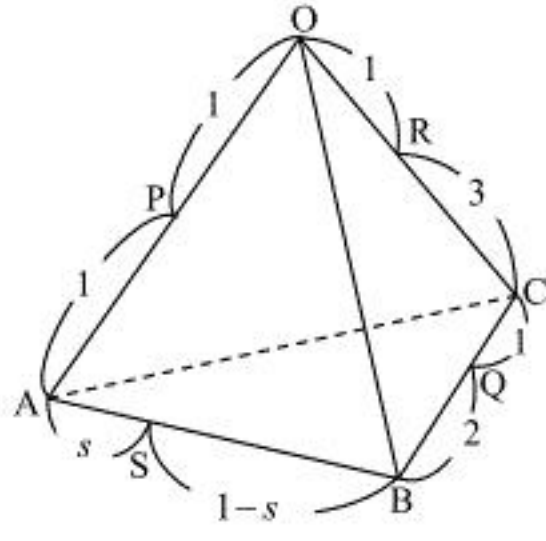
となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{35}{216}$$

3

ア

(1)



$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

(2)

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{4}\vec{c}, \overrightarrow{OS} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} \\ &= (1-s)\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{RS} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$$

(3)

線分 PQ と線分 RS が交わる時、その交点を T とおくと、実数 k, l を用いて、

$\overrightarrow{PT} = k\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RT} = l\overrightarrow{RS}$ とおける。このとき、 $\overrightarrow{OT}$ を 2 通りの方法で表すと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + k\overrightarrow{PQ} \\ &= \frac{1-k}{2}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}k\vec{c} \\ \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RT} \\ &= \frac{1}{4}\vec{c} + l\overrightarrow{RS} \\ &= l(1-s)\vec{a} + ls\vec{b} + \frac{1-l}{4}\vec{c} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから、それぞれの係数は等しい。したがって、

$$\begin{cases} \frac{1-k}{2} = l(1-s) \\ \frac{k}{3} = ls \\ \frac{2}{3}k = \frac{1-l}{4} \end{cases}$$

となる。これを解いて、

$$s = \frac{1}{7}, k = \frac{1}{5}, l = \frac{7}{15}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad s = \frac{1}{7}$$

イ

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ について、公差を d とおくと、一般項は

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

とおける。したがって、

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 \\ \Leftrightarrow a_1 + 2d &= 4 \\ a_8 &= 3 \\ \Leftrightarrow a_1 + 7d &= 3 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 4 \\ a_1 + 7d = 3 \end{cases} \therefore a_1 = \frac{22}{5}, d = -\frac{1}{5}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} a_{99} &= a_1 + (99-1)d \\ &= -\frac{76}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_1 = \frac{22}{5}, a_{99} = -\frac{76}{5}$$

(2)

(1)より、

$$a_n = \frac{23-n}{5}$$

となるから、 a_n が整数となる時、整数 k を用いて、

$$\begin{aligned} 23-n &= 5k \\ \Leftrightarrow n &= 23-5k \end{aligned}$$

とおける。いま、 $1 \leq n \leq 99$ の範囲について考えているため、

$$\begin{aligned} 1 &\leq n \leq 99 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 23-5k \leq 99 \\ \Leftrightarrow -\frac{76}{5} &\leq k \leq \frac{22}{5} \end{aligned}$$

となる。したがって、 k は整数より、 k の範囲は

$$-15 \leq k \leq 4$$

であり、全部で 20 個存在する。

(答) 20 個

(3)

99 個の項 $a_1, a_2, \dots, a_{99}$ の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{99} a_k &= \sum_{k=1}^{99} \frac{23-k}{5} \\ &= \frac{23}{5} \cdot 99 - \frac{1}{5} \cdot \frac{99(99+1)}{2} \\ &= -\frac{2673}{5} \end{aligned}$$

となる。また、(2)より $a_1, a_2, \dots, a_{99}$ のうち整数であるものの和は $n = 23-5k$ について、 $-15 \leq k \leq 4$ での和を取ればよいから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=-15}^4 a_{23-5k} &= \sum_{k=-15}^4 \frac{23-(23-5k)}{5} \\ &= \sum_{k=-15}^4 k \\ &= \frac{20 \cdot \{(-15)+4\}}{2} \\ &= -110 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a_1, a_2, \dots, a_{99}$ のうち整数でないものの和は

$$-\frac{2673}{5} - (-110) = -\frac{2123}{5}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad -\frac{2123}{5}$$

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2x - 5 \\ &= (x-1)(3x+5) \end{aligned}$$

となるから、増減表は以下のようになる

x	...	$-\frac{5}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

増減表より、 $x = -\frac{5}{3}$ で $f(x)$ は極大値を取ることが分かるので、 $k = -\frac{5}{3}$ である。

(答) $k = -\frac{5}{3}$

(2)

$g'(x) = 3x^2 - 4x + a$ より、点 $(k, g(k))$ における曲線 C_2 の傾きは

$$g'(k) = 3k^2 - 4k + a$$

となる。点 $(k, g(k))$ における曲線 C_2 の傾きが -18 であることと、 $k = -\frac{5}{3}$ であることより、

$$\begin{aligned} g'\left(-\frac{5}{3}\right) &= -18 \\ \Leftrightarrow 3\left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{5}{3}\right) + a &= -18 \\ \Leftrightarrow a &= -33 \end{aligned}$$

となる。また、点 P の x 座標を p とおくと、曲線 C_1, C_2 は点 P を通り、そこでの接線の傾きが等しいので、

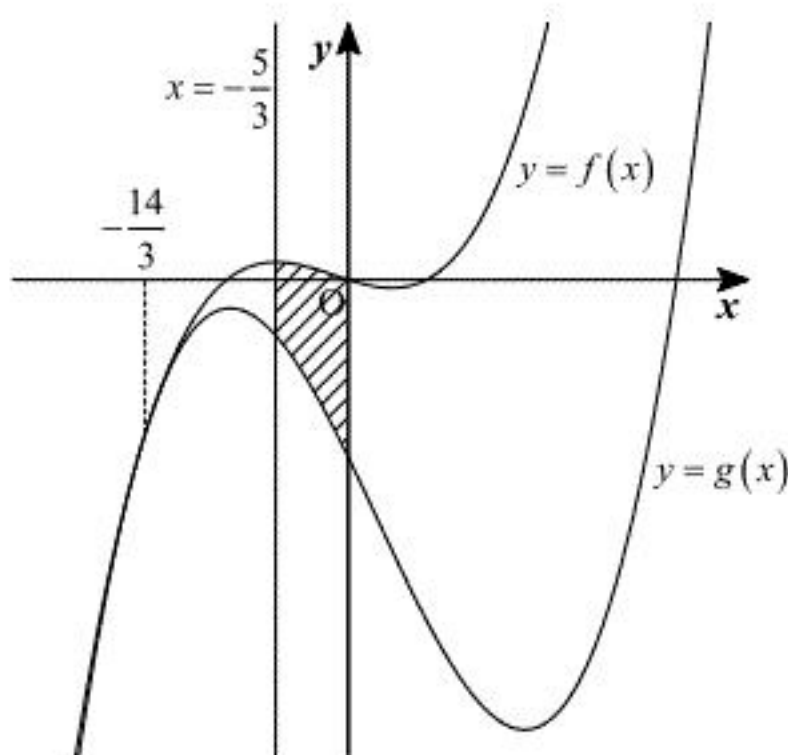
$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(p) = g(p) \\ f'(p) = g'(p) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3p^2 + 28p - b = 0 \\ p = -\frac{14}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} p = -\frac{14}{3} \\ b = -\frac{196}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = -33, b = -\frac{196}{3}$

(3)

面積を求めるべき領域は下図のようになる。



したがって、面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{5}{3}}^0 \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_{-\frac{5}{3}}^0 \left(3x^2 + 28x + \frac{196}{3} \right) dx \\ &= \int_{-\frac{5}{3}}^0 3 \left(x + \frac{14}{3} \right)^2 dx \\ &= \left[\left(x + \frac{14}{3} \right)^3 \right]_{-\frac{5}{3}}^0 \\ &= \frac{2015}{27} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2015}{27}$

(1)

三角関数の加法定理を使うと、

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta &= \sin(\theta + 2\theta) \\
 &= \sin \theta \cos 2\theta + \cos \theta \sin 2\theta \\
 &= \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) + \cos \theta \cdot 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= \sin \theta - 2\sin^3 \theta + 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) \\
 &= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$$

(2)

(1)と同様にして、

$$\begin{aligned}
 \cos 3\theta &= \cos(\theta + 2\theta) \\
 &= \cos \theta \cos 2\theta - \sin \theta \sin 2\theta \\
 &= \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) - \sin \theta \cdot 2\sin \theta \cos \theta \\
 &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta
 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

(3)

(1)(2)より、

$$\begin{aligned}
 y &= -8\sin^3 \theta + 6\sin \theta - 3\cos \theta + 4\cos^3 \theta + 1 \\
 &= 2(3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) + (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + 1 \\
 &= 2\sin 3\theta + \cos 3\theta + 1 \\
 &= \sqrt{5} \sin(3\theta + \alpha) + 1
 \end{aligned}$$

と変形できる。ただし、 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) である。ここで、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より、

$$\frac{3}{2}\pi + \alpha \leq 3\theta + \alpha \leq 3\pi + \alpha$$

となる。したがって、最大値は $3\theta + \alpha = \frac{5}{2}\pi$ のとき $\sqrt{5} + 1$ となり、最小値は

$$3\theta + \alpha = \frac{3}{2}\pi + \alpha \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

のとき

$$\begin{aligned}
 \sqrt{5} \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) + 1 &= -\sqrt{5} \cos \alpha + 1 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \sqrt{5} + 1, \text{ 最小値 } -1$$