

(1)

$$x^2 - 2ax + a + 2 = (x - a)^2 - a^2 + a + 2$$

と変形できるから、2 次関数の最小値は $-a^2 + a + 2$ である。よって最小値が負である条件は

$$-a^2 + a + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)(a + 1) > 0$$

$$\therefore a < -1, a > 2$$

となる。

(答) $a < -1, a > 2$

(2)

7 試合のうち A チームが勝つ 3 試合の選び方は ${}_7C_3$ 通りであり、残りの 4 試合のうち引き分けとなる 2 試合の選び方は ${}_4C_2$ 通りである。よって求める確率は

$${}_7C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 6^2 \cdot 3^2} = \frac{35}{432}$$

となる。

(答) $\frac{35}{432}$

(3)

$\triangle ABC$ について余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cos \angle BAC$$

$$\Leftrightarrow 30^2 = AB^2 + 26^2 - 2AB \cdot 26 \cdot \frac{5}{13}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - 20AB - 224 = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB + 8)(AB - 28) = 0$$

$$\therefore AB = 28$$

となる。また、直線 OA は $\triangle ABC$ を含む平面に垂直であるから、四面体 OABC の体積は

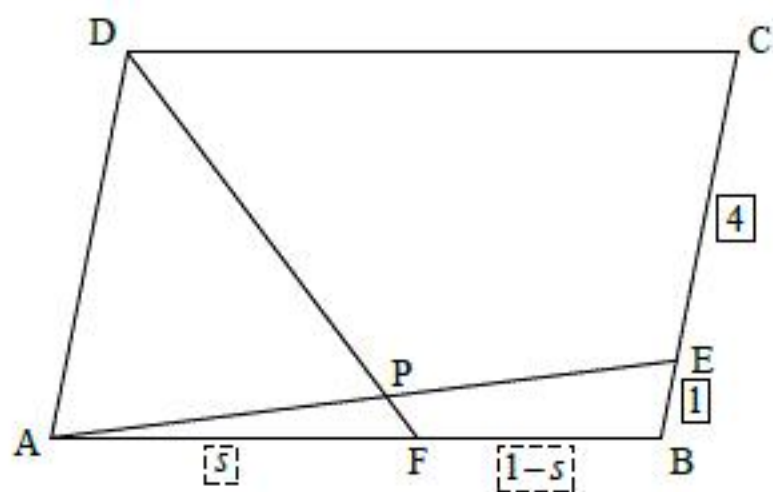
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} OA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot CA \sin \angle BAC &= \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 26 \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= 84 \cdot 26 \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \\ &= 84 \cdot 26 \cdot \frac{12}{13} \\ &= 84 \cdot 24 \\ &= 2016 \end{aligned}$$

となる。

(答) $AB = 28$, 四面体 OABC の体積 : 2016

2

(1)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \vec{a} + \vec{b} \text{ より} \\ |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 6^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 36 &= 4^2 + 5^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{5}{2}$

(2)

$AP:PE = t:1-t$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AE} \\ &= t\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= t\vec{a} + \frac{t}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。また、 $DP:PF = u:1-u$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= u\overrightarrow{AF} + (1-u)\overrightarrow{AD} \\ &= us\vec{a} + (1-u)\vec{b} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから

$$\begin{aligned} \begin{cases} t = us \\ \frac{t}{5} = 1-u \end{cases} \\ \therefore (t, u) &= \left(\frac{5s}{s+5}, \frac{5}{s+5}\right) \end{aligned}$$

となるので

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AP} = \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b}$

(3)

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

であるから、

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{s+5}\right)\vec{b}$$

となる。 $\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{b}$ と平行なとき、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{PQ} = k\vec{b}$$

と表される。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5} &= 0 \\ \Leftrightarrow s+5 &= 10s \\ \Leftrightarrow s &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

となる。またこのとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b} \\ &= \frac{5 \cdot \frac{5}{9}}{\frac{5}{9} + 5}\vec{a} + \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{9} + 5}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= \left|\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{10}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{100}|\vec{b}|^2 \\ &= 4 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = 2$$

となる。

(答) $s = \frac{5}{9}, |\overrightarrow{AP}| = 2$

(1)

$$89 = 29 \cdot 3 + 2$$

$$29 = 2 \cdot 14 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2$$

となるから、89と29の最大公約数は1である。

(答) 1

(2)

(1)の計算をもとにすると

$$1 = 29 - 2 \cdot 14$$

$$= 29 - 14 \cdot (89 - 29 \cdot 3)$$

$$= -14 \cdot 89 + 43 \cdot 29$$

となるから、 $89x + 29y = 1$ の解の1つとして

$$(x, y) = (-14, 43)$$

が得られる。

(答) $(x, y) = (-14, 43)$

(3)

(2)より得た等式

$$-14 \cdot 89 + 43 \cdot 29 = 1$$

の両辺に -20 をかけると

$$280 \cdot 89 - 860 \cdot 29 = -20$$

となるから、 $89x + 29y = -20$ の両辺からこれを引くと

$$89(x - 280) + 29(y + 860) = 0$$

$$\Leftrightarrow 89(x - 280) = -29(y + 860)$$

となる。(1)より89と29は互いに素であるから $x - 280$ は29の倍数であるので、整数 k を用いて

$$x - 280 = 29k$$

$$\Leftrightarrow x = 29k + 280$$

となる。逆に $x = 29k + 280$ を満たすとき、 $89x + 29y = -20$ を満たす整数 y が存在する。よって $\{x_m\}$ は $x_1 = 19$ 、公差29の等差数列であるから

$$x_m = 19 + 29(m - 1) = 29m - 10$$

となる。

(答) $x_m = 29m - 10$

(4)

(3)より

$$89x_m + 29y_m = -20$$

$$\Leftrightarrow 89(29m - 10) + 29y_m = -20$$

$$\Leftrightarrow y_m = \frac{1}{29}(870 - 89 \cdot 29m) = -89m + 30$$

となる。よって

$$3x_m + y_m = 3(29m - 10) - 89m + 30 = -2m$$

となるから

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n (3x_m + y_m)^2 &= \sum_{m=1}^n (-2m)^2 \\ &= 4 \sum_{m=1}^n m^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$

(1)

$$y' = -3x^2 + 6x + 1$$

であるから、接線 ℓ の方程式は

$$y = (-3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 1)(x - 3) + 0 = -8x + 24$$

となる。

(答) $y = -8x + 24$

(2)

(1)より

$$q_1 = -8p + 24$$

であり、

$$q_2 = -p^3 + 3p^2 + p - 3$$

である。よって

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= -8p + 24 - (-p^3 + 3p^2 + p - 3) \\ &= p^3 - 3p^2 - 9p + 27 \end{aligned}$$

となる。これを $f(p)$ ($p < 3$) とおくと

$$f'(p) = 3p^2 - 6p - 9 = 3(p - 3)(p + 1)$$

となるから $f(p)$ の増減は下のようになる。

p	...	-1	...	3
$f'(p)$	+	0	-	/
$f(p)$	↗	32	↘	/

よって $q_1 - q_2$ の最大値は

$$f(-1) = 32$$

となる。

(答) 32

(3)

接線 ℓ と曲線 C の式から y を消去すると

$$-8x + 24 = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2(x + 3) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3$$

となるから、交点は $x = \pm 3$ である。接線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形を y 軸によって2つに分けたとき、 $x < 0$ の部分の面積を S_1 、 $x \geq 0$ の部分を S_2 とおくと

$$S_1 = \int_{-3}^0 (x^3 - 3x^2 - 9x + 24) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 27x \right]_{-3}^0$$

$$= -\frac{81}{4} - 27 + \frac{81}{2} + 81$$

$$= \frac{297}{4}$$

$$S_2 = \int_0^3 (x^3 - 3x^2 - 9x + 24) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 27x \right]_0^3$$

$$= \frac{81}{4} - 27 - \frac{81}{2} + 81$$

$$= \frac{135}{4}$$

となるから

$$S = S_2 = \frac{135}{4}$$

$$T = S_1 = \frac{297}{4}$$

となり、

$$\frac{T}{S} = \frac{\frac{297}{4}}{\frac{135}{4}} = \frac{11}{5}$$

となる。

(答) $\frac{T}{S} = \frac{11}{5}$

(1)

$f(x) = e^x - a(x-2)$ とおくと、曲線 C と x 軸が接する条件は、ある t において $f(t) = f'(t) = 0$ となることである。ここで

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^t - a(t-2) &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^t - a &= 0 \\ \Leftrightarrow e^t &= a \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。①に②を代入すると

$$\begin{aligned} a - a(t-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow a(3-t) &= 0 \end{aligned}$$

となるが、②より $a > 0$ なので

$$t = 3$$

となる。曲線 C と x 軸の接点の x 座標は 3 となり、②より

$$a = e^3$$

となる。

(答) 曲線 C と x 軸の接点の x 座標：3, $a = e^3$

(2)

$$f'(x) = e^x - a = e^x - e^3$$

より、 $f(x)$ は $0 < x < 3$ で単調減少である。また、

$$f(0) = 1 - e^3(0-2) = 1 + 2e^3$$

となるから $0 < x < 3$ において $f(x) > 0$ である。よって求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^3 \{f(x)\}^2 dx &= \pi \int_0^3 \{e^x - e^3(x-2)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^3 \{e^{2x} - 2e^{x+3}(x-2) + e^6(x-2)^2\} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^3 - 2\pi \int_0^3 x e^{x+3} dx + 4\pi \int_0^3 e^{x+3} dx + e^6 \pi \left[\frac{1}{3} (x-2)^3 \right]_0^3 \\ &= \frac{e^6 - 1}{2} \pi - 2\pi [x e^{x+3}]_0^3 + 2\pi \int_0^3 e^{x+3} dx + 4\pi [e^{x+3}]_0^3 + 3e^6 \pi \\ &= \frac{e^6 - 1}{2} \pi - 6\pi e^6 + 2\pi e^6 - 2\pi e^3 + 4\pi e^6 - 4\pi e^3 + 3e^6 \pi \\ &= \pi \left(\frac{7}{2} e^6 - 6e^3 - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\pi \left(\frac{7}{2} e^6 - 6e^3 - \frac{1}{2} \right)$