

(1)

求めるベクトルを $\vec{n} = (x, y, z)$ とおくと

$$\begin{aligned}\vec{n} &\perp \vec{a} \\ \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y - z &= 0 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}\vec{n} &\perp \vec{b} \\ \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x + y - 2z &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①, ②から y を消去すると

$$\begin{aligned}3x - 3z &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= x\end{aligned}$$

となり, これを①に代入すると

$$y = 0$$

となる。また, $\vec{n} = (x, y, z)$ は単位ベクトルであるから

$$\begin{aligned}|\vec{n}| &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 1 \\ \therefore x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となるので, 求めるベクトルは

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2)

$1 \leq x \leq 27$ のとき

$$0 \leq \log_3 x \leq 3$$

となる。ここで

$$y = (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = (\log_3 x - 1)^2 - 4$$

となるから, y は $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$ のときに最小値 -4 をとり, $\log_3 x = 3 \Leftrightarrow x = 27$ のときに最大値 0 をとる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } 0 (x=27), \text{ 最小値: } -4 (x=3)$$

(3)

正三角形の残りの2つの頂点は, 点 P の周りに点 A を $\frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi$ だけ回転させた点である。よ

って

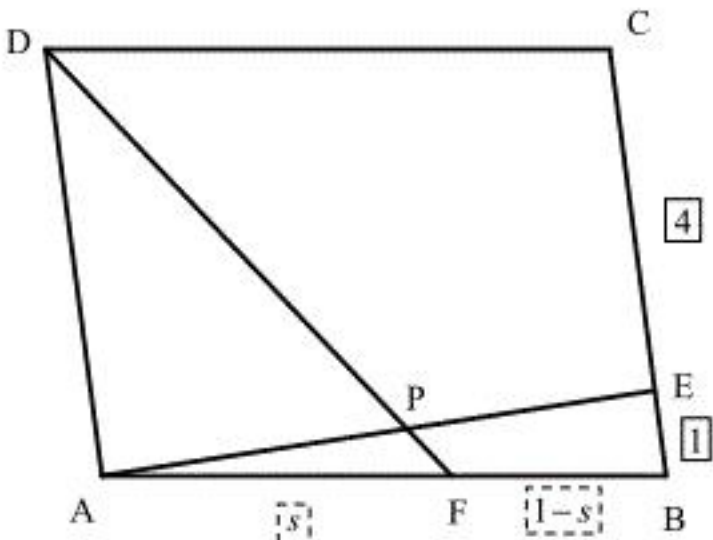
$$\begin{aligned}\{2 - (1 - \sqrt{3}i)\} \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) + (1 - \sqrt{3}i) &= -1 - \sqrt{3}i \\ \{2 - (1 - \sqrt{3}i)\} \left(\cos \frac{2}{3}\pi - i \sin \frac{2}{3}\pi \right) + (1 - \sqrt{3}i) &= 2 - 2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) -1 - \sqrt{3}i, 2 - 2\sqrt{3}i$$

2

(1)



$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 6^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 36 &= 4^2 + 5^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{5}{2}$

(2)

$AP:PE = t:1-t$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AE} \\ &= t\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= t\vec{a} + \frac{t}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。また、 $DP:PF = u:1-u$ とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= u\overrightarrow{AF} + (1-u)\overrightarrow{AD} \\ &= u\vec{a} + (1-u)\vec{b} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから

$$\begin{aligned} \begin{cases} t = us \\ \frac{t}{5} = 1-u \end{cases} \\ \therefore (t, u) &= \left(\frac{5s}{s+5}, \frac{5}{s+5}\right) \end{aligned}$$

となるので

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AP} = \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b}$

(3)

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

であるから、

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{s+5}\right)\vec{b}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるから、 $\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{b}$ と平行なとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5} &= 0 \\ \Leftrightarrow s+5 &= 10s \\ \Leftrightarrow s &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

となる。またこのとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b} \\ &= \frac{5 \cdot \frac{5}{9}}{\frac{5}{9} + 5}\vec{a} + \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{9} + 5}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= \left|\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{10}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{100}|\vec{b}|^2 \\ &= 4 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = 2$$

となる。

(答) $s = \frac{5}{9}, |\overrightarrow{AP}| = 2$

(1)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} + a \cos \frac{\pi}{6} + b &= \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a + b &= \sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow b &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)$$

(2)

$$f'(x) = 2\cos 2x - a\sin x$$

となる。点 P における法線は点 Q を通るので、 y 軸に平行ではないから、点 P における接線

もまた x 軸に平行ではない。したがって、 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ である。よって点 P における法線の方程

式は、

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{a+2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + b
 \end{aligned}$$

となる。これが点 Q を通るとき

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{2\sqrt{3}}{a+2} + b \\
 \Leftrightarrow b &= -\frac{2\sqrt{3}}{a+2}
 \end{aligned}$$

となる。ここで(1)より b を消去すると

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\sqrt{3}}{a+2} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1) \\
 \Leftrightarrow a^2 + a - 6 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (a-2)(a+3) &= 0 \\
 \therefore a &= -3, 2
 \end{aligned}$$

となる。よって求める値は

$$(a, b) = (-3, 2\sqrt{3}), \left(2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (-3, 2\sqrt{3}), \left(2, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(3)

$f'(x) = 2\cos 2x - a\sin x$ より

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{a}{2}$$

となる。 $x = \frac{\pi}{6}$ で極値をとるならば $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$ となる。つまり $a = 2$ のみである。このとき

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2\cos 2x - 2\sin x \\
 &= 2(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x \\
 &= -4\sin^2 x - 2\sin x + 2 \\
 &= -2(2\sin x - 1)(\sin x + 1)
 \end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$									

よって $a = 2$ のとき $x = \frac{\pi}{6}$ は確かに極値である。また、 $x = \frac{5}{6}\pi$ においても極値をとることがわ

かる。よって $f(x)$ のすべての極値は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \quad (\text{極大値})$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -2\sqrt{3} \quad (\text{極小値})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -2\sqrt{3}$$

(1)

与式

両辺に $\frac{1+a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}$ をかけて整理すると

$$\begin{aligned}\frac{1-a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} &= \frac{1}{a_n^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}^2} &= \frac{1}{a_n^2} + 1\end{aligned}$$

となる。よって $b_n = \frac{1}{a_n^2}$ であるから

$$b_1 = 1$$

$$b_{n+1} = b_n + 1$$

となるので $b_n = n$ より

$$b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 4$$

となる。

(答) $b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 4$

(2)

(1)より $b_n = n$ であり, $b_n > 0$ であるから

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{b_n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \quad (a_n > 0)$$

となる。

(答) $a_n = \sqrt{\frac{1}{n}}$

(3)

自然数 k に対して

$$k \leq x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

となる。これは $x = k$ のときのみ成立し, 等号は常には成立しないので

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dx = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

となる。これを $k = 1 \sim n$ まで足すと

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ \Leftrightarrow \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &< \sum_{k=1}^n a_k\end{aligned}$$

となるから, 題意は示された。

(証明終)

(1)

 $f(t) = e^t - e^{-t}$ のとき

$$f(-t) = e^{-t} - e^t = -f(t)$$

となるから $f(t)$ は奇関数である。よって

$$F(x) = \int_{-x}^x f(t) dt = 0$$

となる。

(答) $F(x) = 0$

(2)

 $g(t)$ は偶関数, $h(t)$ は奇関数であるから

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{-x}^x \{g(t) + h(t)\} dt \\ &= 2 \frac{d}{dx} \int_0^x g(t) dt \\ &= 2g(x) \end{aligned}$$

となる。

(答) $F'(x) = 2g(x)$

(3)

 $f(t) = t^2 - 1 + (e^t - e^{-t})\cos t$ について, $t^2 - 1$ は偶関数であり, $(e^t - e^{-t})\cos t$ は奇関数であるから

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \int_0^x (t^2 - 1) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} t^3 - t \right]_0^x \\ &= \frac{2}{3} x^3 - 2x \end{aligned}$$

$$F'(x) = 2x^2 - 2 = 2(x-1)(x+1)$$

となる。よって $F(x)$ の $x > 0$ における増減は以下ようになる。

x	0	...	1	...
$F'(x)$		-	0	+
$F(x)$			$-\frac{4}{3}$	

よって $F(x)$ は $x=1$ で最小値 $-\frac{4}{3}$ をとる。(答) $-\frac{4}{3}$