

(1)

2次方程式  $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$  の判別式を  $D$  とすると最小値が負である条件は  $D > 0$  である。

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - a - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a+1) &> 0 \\ \therefore a < -1, a > 2\end{aligned}$$

となる。

(答)  $a < -1, a > 2$

(2)

7試合のうちAチームが勝つ3試合の選び方は  ${}_7C_3$  通りであり、残りの4試合のうち引き分けとなる2試合の選び方は  ${}_4C_2$  通りである。よって求める確率は

$${}_7C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 6^2 \cdot 3^2} = \frac{35}{432}$$

となる。

(答)  $\frac{35}{432}$

(3)

$\triangle ABC$  について余弦定理より

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cos \angle BAC \\ \Leftrightarrow 30^2 &= AB^2 + 26^2 - 2AB \cdot 26 \cdot \frac{5}{13} \\ \Leftrightarrow AB^2 - 20AB - 224 &= 0 \\ \Leftrightarrow (AB+8)(AB-28) &= 0 \\ \therefore AB &= 28\end{aligned}$$

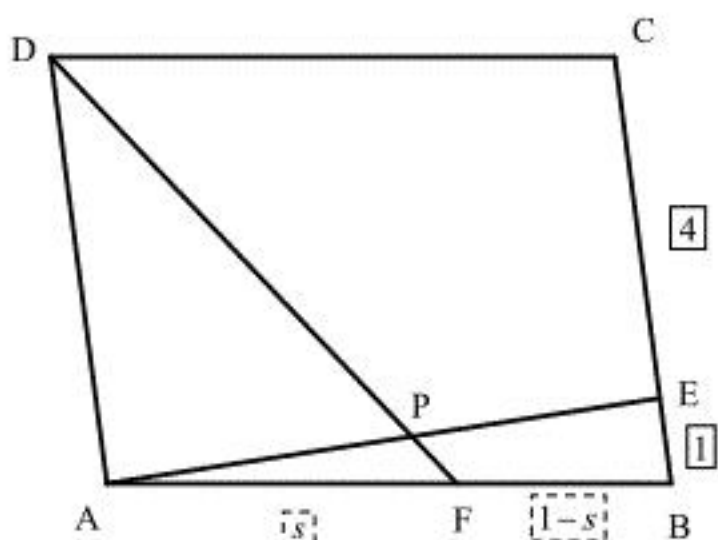
となる。また、直線  $OA$  は  $\triangle ABC$  を含む平面に垂直であるから、四面体  $OABC$  の体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}OA \cdot \frac{1}{2}AB \cdot CA \sin \angle BAC &= \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 26 \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} \\ &= 84 \cdot 26 \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \\ &= 84 \cdot 26 \cdot \frac{12}{13} \\ &= 84 \cdot 24 \\ &= 2016\end{aligned}$$

となる。

(答)  $AB = 28$ , 四面体  $OABC$  の体積: 2016

(1)



$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$  より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}|^2 &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 6^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 36 &= 4^2 + 5^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{5}{2}$

(2)

$AP:PE = t:1-t$  とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AE} \\ &= t\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= t\vec{a} + \frac{t}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。また、 $DP:PF = u:1-u$  とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= u\overrightarrow{AF} + (1-u)\overrightarrow{AD} \\ &= us\vec{a} + (1-u)\vec{b} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$  は一次独立であるから

$$\begin{cases} t = us \\ \frac{t}{5} = 1-u \end{cases} \therefore (t, u) = \left(\frac{5s}{s+5}, \frac{5}{s+5}\right)$$

となるので

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b}$$

となる。

(答)  $\overrightarrow{AP} = \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b}$

(3)

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

であるから、

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{s+5}\right)\vec{b}$$

となる。 $\vec{a}, \vec{b}$  は一次独立であるから、 $\overrightarrow{PQ}$  が  $\vec{b}$  と平行なとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5} &= 0 \\ \Leftrightarrow s+5 &= 10s \\ \Leftrightarrow s &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

となる。またこのとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{5s}{s+5}\vec{a} + \frac{s}{s+5}\vec{b} \\ &= \frac{5 \cdot \frac{5}{9}}{\frac{5}{9} + 5}\vec{a} + \frac{\frac{5}{9}}{\frac{5}{9} + 5}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= \left|\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{10}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{100}|\vec{b}|^2 \\ &= 4 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = 2$$

となる。

(答)  $s = \frac{5}{9}, |\overrightarrow{AP}| = 2$

3

(1)

$$\begin{aligned}89 &= 29 \cdot 3 + 2 \\ 29 &= 2 \cdot 14 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2\end{aligned}$$

となるから、89 と 29 の最大公約数は1である。

(答) 1

(2)

(1)の計算をもとにすると

$$\begin{aligned}1 &= 29 - 2 \cdot 14 \\ &= 29 - 14 \cdot (89 - 29 \cdot 3) \\ &= -14 \cdot 89 + 43 \cdot 29\end{aligned}$$

となるから、 $89x + 29y = 1$  の解の1つとして

$$(x, y) = (-14, 43)$$

が得られる。

(答)  $(x, y) = (-14, 43)$

(3)

(2)より得た等式

$$-14 \cdot 89 + 43 \cdot 29 = 1$$

の両辺に  $-20$  をかけると

$$280 \cdot 89 - 860 \cdot 29 = -20$$

となるから、 $89x + 29y = -20$  の両辺からこれを引くと

$$\begin{aligned}89(x - 280) + 29(y + 860) &= 0 \\ \Leftrightarrow 89(x - 280) &= -29(y + 860)\end{aligned}$$

となる。(1)より 89 と 29 は互いに素であるから  $x - 280$  は 29 の倍数であるので、整数  $k$  を用いて

$$\begin{aligned}x - 280 &= 29k \\ \Leftrightarrow x &= 29k + 280\end{aligned}$$

となる。逆に  $x = 29k + 280$  を満たすとき、 $89x + 29y = -20$  を満たす整数  $y$  が存在する。ここで、

$$\begin{aligned}x &> 0 \\ \Leftrightarrow k &> -\frac{280}{29} = -10 + \frac{10}{29}\end{aligned}$$

より、これを満たす最小の整数  $k$  は  $-9$  であり

$$x_1 = 29 \cdot (-9) + 280 = 19$$

となる。よって  $\{x_m\}$  は  $x_1 = 19$ 、公差 29 の等差数列であるから

$$x_m = 19 + 29(m - 1) = 29m - 10$$

となる。

(答)  $x_m = 29m - 10$

(4)

(3)より

$$\begin{aligned}89x_m + 29y_m &= -20 \\ \Leftrightarrow 89(29m - 10) + 29y_m &= -20 \\ \Leftrightarrow y_m &= \frac{1}{29}(870 - 89 \cdot 29m) = -89m + 30\end{aligned}$$

となる。よって

$$3x_m + y_m = 3(29m - 10) - 89m + 30 = -2m$$

となるから

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n (3x_m + y_m)^2 &= \sum_{m=1}^n (-2m)^2 \\ &= 4 \sum_{m=1}^n m^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$

(1)

$$y' = -3x^2 + 6x + 1$$

であるから、接線  $\ell$  の方程式は

$$y = (-3 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 1)(x - 3) + 0 = -8x + 24$$

となる。

(答)  $y = -8x + 24$

(2)

(1)より

$$q_1 = -8p + 24$$

であり、

$$q_2 = -p^3 + 3p^2 + p - 3$$

である。よって

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= -8p + 24 - (-p^3 + 3p^2 + p - 3) \\ &= p^3 - 3p^2 - 9p + 27 \end{aligned}$$

となる。これを  $f(p)$  ( $p < 3$ ) とおくと

$$f'(p) = 3p^2 - 6p - 9 = 3(p - 3)(p + 1)$$

となるから  $f(p)$  の増減は下のようになる。

|         |     |    |     |     |
|---------|-----|----|-----|-----|
| $p$     | ... | -1 | ... | 3   |
| $f'(p)$ | +   | 0  | -   | /   |
| $f(p)$  | ↗   | 32 | ↘   |     |
|         |     |    |     | (0) |

よって  $q_1 - q_2$  の最大値は

$$f(-1) = 32$$

となる。

(答) 32

(3)

接線  $\ell$  と曲線  $C$  の式から  $y$  を消去すると

$$-8x + 24 = -x^3 + 3x^2 + x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 (x + 3) = 0$$

$$\therefore x = \pm 3$$

となるから、交点は  $x = \pm 3$  である。 $f(-3) = 0$  より  $-3 < p < 3$  で  $f(p) > 0$  となる。よって、接線  $\ell$  が常に曲線  $C$  の上側である。接線  $\ell$  と曲線  $C$  で囲まれた図形を  $y$  軸によって2つに分けたとき、 $x < 0$  の部分の面積を  $S_1$ 、 $x \geq 0$  の部分を  $S_2$  とおくと

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^0 (x^3 - 3x^2 - 9x + 24) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 27x \right]_{-3}^0 \\ &= -\frac{81}{4} - 27 + \frac{81}{2} + 81 \\ &= \frac{297}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^3 (x^3 - 3x^2 - 9x + 24) dx \\ &= \left[ \frac{1}{4}x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 27x \right]_0^3 \\ &= \frac{81}{4} - 27 - \frac{81}{2} + 81 \\ &= \frac{135}{4} \end{aligned}$$

となるから

$$S = S_2 = \frac{135}{4}$$

$$T = S_1 = \frac{297}{4}$$

となり、

$$\frac{T}{S} = \frac{\frac{297}{4}}{\frac{135}{4}} = \frac{11}{5}$$

となる。

(答)  $\frac{T}{S} = \frac{11}{5}$

(1)

放物線と円を表す方程式から  $x^2$  を消去すると

$$y + (y - 3)^2 = \frac{6^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y - 5) = 0$$

$$\therefore y = 0, 5$$

となる。これと  $y = x^2$  から、求める共有点の座標は

$$(0, 0), (\sqrt{5}, 5), (-\sqrt{5}, 5)$$

となる。

$$(\text{答}) (0, 0), (\sqrt{5}, 5), (-\sqrt{5}, 5)$$

(2)

放物線と円を表す方程式から  $x^2$  を消去すると

$$y + (y - 3)^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 9 - \frac{r^2}{4} = 0 \quad \cdots \text{①}$$

となり、共有点の  $y$  座標は上式を満たす。上式の判別式を  $D$  とすると

$$D = (-5)^2 - 4\left(9 - \frac{r^2}{4}\right) = r^2 - 11$$

となる。ここで  $r > 0$  に注意すれば、①の解の存在個数は

$$0 < r < \sqrt{11} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$r = \sqrt{11} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$r > \sqrt{11} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

となる。ここで共有点の存在条件は放物線の方程式  $y = x^2$  から  $y \geq 0$  である。①の左辺を

$f(y)$  とすると、 $f(y)$  は  $y = \frac{5}{2}$  に軸を持つ放物線であるから、①が解を持つとき少なくとも

1つは正である。さらに、

$$f(0) = 9 - \frac{r^2}{4}$$

であるから、 $r > 6$  のとき  $f(0)$  は負となる。よって  $r > 6$  のとき、①式は非負の解を1つだけもち、 $r = 6$  のとき  $y = 0$  を解にもつ。①の正の解1つに対して、放物線の方程式  $y = x^2$  より異なる共有点の数は2つ存在する。以上より、 $r$  に対する共有点の数は

$$0 < r < \sqrt{11} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$r = \sqrt{11} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$\sqrt{11} < r < 6 \text{ のとき } 4 \text{ 個}$$

$$r = 6 \text{ のとき } 3 \text{ 個}$$

$$r > 6 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

となる。

$$(\text{答}) 0 < r < \sqrt{11} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$r = \sqrt{11} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$\sqrt{11} < r < 6 \text{ のとき } 4 \text{ 個}$$

$$r = 6 \text{ のとき } 3 \text{ 個}$$

$$r > 6 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$