

数 学

学 科(コース)	配 点
化学・生命理工学科, 物理・材料理工学科, システム創成工学科(機械科学コース, 社会基盤・環境コース)	300 点
システム創成工学科(電気電子通信コース, 知能・メディア情報コース)	400 点

9 時 30 分 ～ 11 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで, この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は, [1] から [5] までの計 5 問です。[1] から [5] までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は, [1] から [5] までの計 5 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答用紙の表紙は, 計算用紙として適宜利用してよい。
5. 解答開始の合図があった後に, 必ず解答用紙のすべてに, 本学の受験番号を記入しなさい。
6. 各解答用紙は, 紙面の中央に印刷された縦線によって, 左側と右側の二つの部分に分けられています。解答は, まず用紙の左側の部分に書き, それから右側の部分に続けなさい。
7. 印刷不鮮明及びページの落丁・乱丁等に気づいた場合は, 手を挙げて監督者に知らせなさい。
8. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
9. 試験終了後, 問題冊子, 解答用紙の表紙は持ち帰りなさい。

1

次の問いに答えよ。

- (1) 2つのベクトル $\vec{a} = (1, -1, -1)$, $\vec{b} = (2, 1, -2)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。
- (2) $1 \leq x \leq 27$ のとき、関数 $y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。
- (3) 複素数平面上で、点 $P(1 - \sqrt{3}i)$ を中心とする円に内接する正三角形がある。この正三角形の頂点の1つが点 $A(2)$ であるとき、残りの2つの頂点を表す複素数を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

2 平行四辺形 ABCD において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とおき、

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 5, \quad |\overrightarrow{AC}| = 6$$

であるとする。また、辺 BC を 1 : 4 に内分する点を E、辺 AB を $s : (1 - s)$ に内分する点を F とし (ただし、 $0 < s < 1$)、線分 AE と線分 DF の交点を P とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ および s で表せ。
- (3) 平行四辺形 ABCD の 2 本の対角線 AC と BD の交点を Q とする。 $\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{b}$ と平行であるとき、 s の値および $|\overrightarrow{AP}|$ の値を求めよ。

3 a, b を定数とし、関数 $f(x) = \sin 2x + a \cos x + b$ とする。 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ における法線が、点 $Q\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{3}, 0\right)$ を通るとき、 a, b の組をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた a, b で定められる $f(x)$ のうち、 $x = \frac{\pi}{6}$ で極値をとるものについて考える。このとき $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲において、 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。

4

数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1, \quad \frac{(1 - a_{n+1})a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{(1 + a_{n+1})a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、すべての自然数 n について $a_n > 0$ とする。

(1) 数列 $\{b_n\}$ が $b_n = \frac{1}{a_n^2}$ で与えられるとき、 b_2, b_3, b_4 の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 不等式 $\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^n a_k$ が成り立つことを示せ。

5 関数 $F(x)$ と連続関数 $f(t)$ の関係が

$$F(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$$

で与えられるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(t) = e^t - e^{-t}$ のとき、 $F(x)$ を求めよ。
- (2) 2つの連続関数 $g(t)$, $h(t)$ において、 $g(-t) = g(t)$, $h(-t) = -h(t)$ が常に成り立つとする。 $f(t) = g(t) + h(t)$ とするとき、 $F'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(t) = t^2 - 1 + (e^t - e^{-t}) \cos t$ のとき、 $x > 0$ における $F(x)$ の最小値を求めよ。