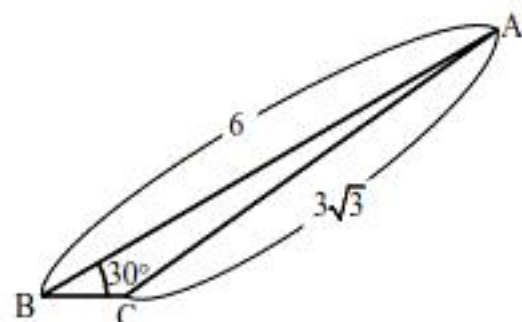
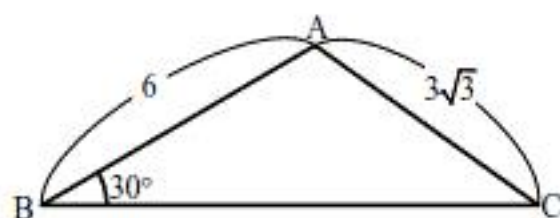


- (1) (大学側が出題ミスと発表していますが、「鋭角三角形 ABC」を「鈍角三角形 ABC」と読みかえた場合の解答例を以下に記します。)



△ABC に関する余弦定理より、

$$\begin{aligned}(3\sqrt{3})^2 &= BC^2 + 6^2 - 2 \cdot BC \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow BC^2 - 6\sqrt{3} \cdot BC + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow BC &= 3(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})\end{aligned}$$

が得られる。 $BC = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ のとき、 $\angle BAC$ が鈍角となり、 $BC = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ のとき、 $\angle BCA$

が鈍角となるので△ABC は鈍角三角形である。 $BC = 3(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$ のもと、△ABC の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{2} (\sqrt{3} \pm \sqrt{2}) \text{ (複号同順)}$$

である。

$$\text{(答)} \quad BC = 3(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}), \quad \triangle ABC = \frac{9}{2} (\sqrt{3} \pm \sqrt{2}) \text{ (複号同順)}$$

(2)

a と b の最大公約数が 9 より、互いに素な自然数 p, q を用いて

$$a = 9p, b = 9q$$

とおけて、

$$a + 2b = 126 \Leftrightarrow p + 2q = 14$$

が得られる。これを満たす自然数 p, q の組み合わせは

$$(p, q) = (2, 6), (4, 5), (6, 4), (8, 3), (10, 2), (12, 1)$$

であるが、これらのうち p, q が互いに素である組み合わせは

$$(p, q) = (4, 5), (8, 3), (12, 1)$$

である。したがって、題意を満たす a, b の組み合わせは

$$(a, b) = (36, 45), (72, 27), (108, 9)$$

である。

$$\text{(答)} \quad (a, b) = (36, 45), (72, 27), (108, 9)$$

(3)

$$\begin{aligned}2a_{n+1} &= a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 &= \frac{1}{2}(a_n - 2)\end{aligned}$$

であり、 $a_1 - 2 = -1$ であるから

$$\begin{aligned}a_n - 2 &= (-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a_n = 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

(1)

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} \\ &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c} \\ &= (1-t)^2(-2, 1) + 2t(1-t)(3, -4) + t^2(7, -1) \\ &= (-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)\end{aligned}$$

であるから、 $R(-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)$ となる。

$$(\text{答}) \quad R(-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)$$

(3)

 $\overrightarrow{BC} = (4, 3)$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OR}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OR} &= 0 \\ \Leftrightarrow -4t^2 + 40t - 8 + 24t^2 - 30t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 20t^2 + 10t - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

が得られるが、 $0 < t < 1$ より $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

(1)

玉に書かれた4個の整数を大きいほうから a, b, c, d とする。方針Aを採用したとき、最後の試行で取った玉に書かれた整数が a であるためには、1回目で b, c, d のいずれかを取り出し、2回目で a を取り出せばよいから、求める確率は

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

方針Bを採用したとき、何回目が最後の試行になるかで場合分けを行う。

[1] 1回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

方針Bでは1回目の試行ではやめないなので最後の試行とはならない。

[2] 2回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1回目で b, c, d のいずれかを取り出し、2回目で a を取り出せばよいから求める確率は

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

である。

[3] 3回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1, 2回目で b, c, d のいずれか2個を取り出すが、2回目の整数が1回目の整数より小さい必要があるから、組み合わせのみを考えればよく、求める確率は

$${}_3C_2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

[4] 4回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1, 2, 3回目で b, c, d を取り出すが、その取り出す順番は、 $(b, c, d), (b, d, c)$ のいずれかであるから求める確率は

$$2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{12}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]より、方針Bを採用したとき最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$$

である。

(答) $\frac{11}{24}$

(3)

方針Cを採用したとき、最後の試行になるのは3回目か4回目でありこれらの場合分けして考える。

[1] 3回目が最後の試行になるとき

1, 2回目は b, c, d のうち2個を取り出すから、求める確率は

$${}_3P_2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

[2] 4回目が最後の試行になるとき

1, 2, 3回目の取り出す順番は $(b, c, d), (c, b, d), (b, d, c), (d, b, c)$ であるから、求める確率は

$$4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

である。

以上[1], [2]より、方針Cを採用したとき最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

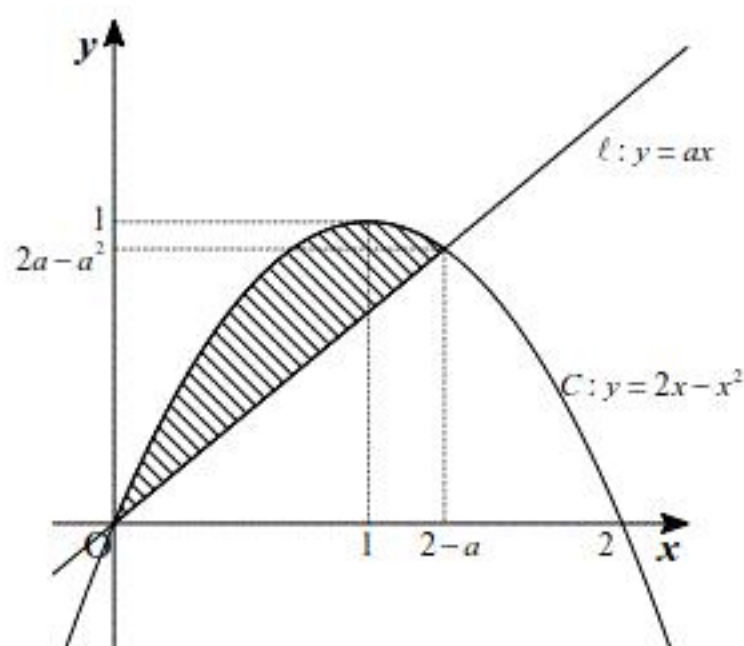
である。

(答) $\frac{5}{12}$

〔補足〕

(2), (3)では「1回目、2回目の整数より大きければ」を「1回目の整数より大きく、かつ2回目の整数より大きければ」と解釈し、「1回目、2回目の整数より小さければ」を「1回目の整数より小さく、または2回目の整数より小さければ」と解釈するか、あるいはその逆で解釈しなければ辻褄が合わないため、前者のように解釈した解答例を示した。

(1)



放物線 C と直線 l の交点を考える。 C, l の方程式から y を消去して

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x - (2-a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2-a \end{aligned}$$

が得られ、交点の x 座標は $x=0, 2-a$ である。 $0 < a < 2$ より $0 < 2-a < 2$ であるから、放物線 C と直線 l で囲まれた図形は上図のようになる。したがって、放物線 C と直線 l で囲まれる面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{2-a} (2x - x^2 - ax) dx &= -\int_0^{2-a} x\{x - (2-a)\} dx \\ &= \frac{\{(2-a) - 0\}^3}{6} \\ &= \frac{(2-a)^3}{6} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{(2-a)^3}{6}$$

(2)

放物線 C は x 軸と x 座標が $0, 2$ の点で交わるから、放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積は

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

である。直線 l が、放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を二等分するとき

$$\begin{aligned} \frac{(2-a)^3}{6} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow (2-a)^3 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2-a &= \sqrt[3]{4} \\ \Leftrightarrow a &= 2 - \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2 - \sqrt[3]{4}$$