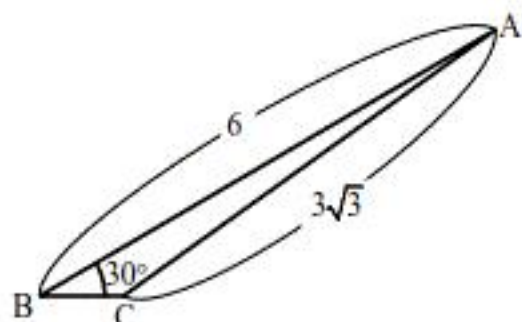
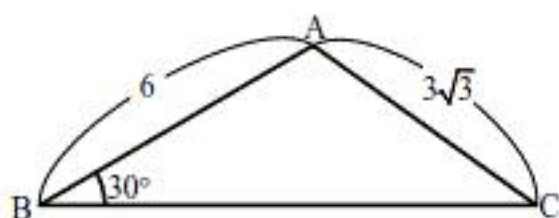


- (1) (大学側が出題ミスと発表していますが、「鋭角三角形 ABC」を「鈍角三角形 ABC」と読みかえた場合の解答例を以下に記します。)



△ABC に関する余弦定理より、

$$\begin{aligned}(3\sqrt{3})^2 &= BC^2 + 6^2 - 2 \cdot BC \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow BC^2 - 6\sqrt{3} \cdot BC + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow BC &= 3(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})\end{aligned}$$

が得られる。 $BC = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ のとき、 $\angle BAC$ が鈍角となり、 $BC = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ のとき、 $\angle BCA$

が鈍角となるので△ABC は鈍角三角形である。 $BC = 3(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$ のもと、△ABC の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{2} (\sqrt{3} \pm \sqrt{2}) \text{ (複号同順)}$$

である。

$$\text{(答)} \quad BC = 3(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}), \quad \triangle ABC = \frac{9}{2} (\sqrt{3} \pm \sqrt{2}) \text{ (複号同順)}$$

(2)

a と b の最大公約数が 9 より、互いに素な自然数 p, q を用いて

$$a = 9p, b = 9q$$

とおけて、

$$a + 2b = 126 \Leftrightarrow p + 2q = 14$$

が得られる。これを満たす自然数 p, q の組み合わせは

$$(p, q) = (2, 6), (4, 5), (6, 4), (8, 3), (10, 2), (12, 1)$$

であるが、これらのうち p, q が互いに素である組み合わせは

$$(p, q) = (4, 5), (8, 3), (12, 1)$$

である。したがって、題意を満たす a, b の組み合わせは

$$(a, b) = (36, 45), (72, 27), (108, 9)$$

である。

$$\text{(答)} \quad (a, b) = (36, 45), (72, 27), (108, 9)$$

(3)

$$\begin{aligned}2a_{n+1} &= a_n + 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 &= \frac{1}{2}(a_n - 2)\end{aligned}$$

であり、 $a_1 - 2 = -1$ であるから

$$\begin{aligned}a_n - 2 &= (-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a_n = 2 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

(1)

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} \\ &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c} \\ &= (1-t)^2(-2, 1) + 2t(1-t)(3, -4) + t^2(7, -1) \\ &= (-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)\end{aligned}$$

であるから、 $R(-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)$ となる。

$$(\text{答}) \quad R(-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)$$

(3)

 $\overrightarrow{BC} = (4, 3)$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OR}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OR} &= 0 \\ \Leftrightarrow -4t^2 + 40t - 8 + 24t^2 - 30t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 20t^2 + 10t - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

が得られるが、 $0 < t < 1$ より $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

(1)

玉に書かれた4個の整数を大きいほうから a, b, c, d とする。方針Aを採用したとき、最後の試行で取った玉に書かれた整数が a であるためには、1回目で b, c, d のいずれかを取り出し、2回目で a を取り出せばよいから、求める確率は

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

方針Bを採用したとき、何回目が最後の試行になるかで場合分けを行う。

[1] 1回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

方針Bでは1回目の試行ではやめないなので最後の試行とはならない。

[2] 2回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1回目で b, c, d のいずれかを取り出し、2回目で a を取り出せばよいから求める確率は

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

である。

[3] 3回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1, 2回目で b, c, d のいずれか2個を取り出すが、2回目の整数が1回目の整数より小さい必要があるから、組み合わせのみを考えればよく、求める確率は

$${}_3C_2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

[4] 4回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1, 2, 3回目で b, c, d を取り出すが、その取り出す順番は、 $(b, c, d), (b, d, c)$ のいずれかであるから求める確率は

$$2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{12}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]より、方針Bを採用したとき最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$$

である。

(答) $\frac{11}{24}$

(3)

方針Cを採用したとき、最後の試行になるのは3回目か4回目でありこれらの場合分けして考える。

[1] 3回目が最後の試行になるとき

1, 2回目は b, c, d のうち2個を取り出すから、求める確率は

$${}_3P_2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

[2] 4回目が最後の試行になるとき

1, 2, 3回目の取り出す順番は $(b, c, d), (c, b, d), (b, d, c), (d, b, c)$ であるから、求める確率は

$$4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

である。

以上[1], [2]より、方針Cを採用したとき最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

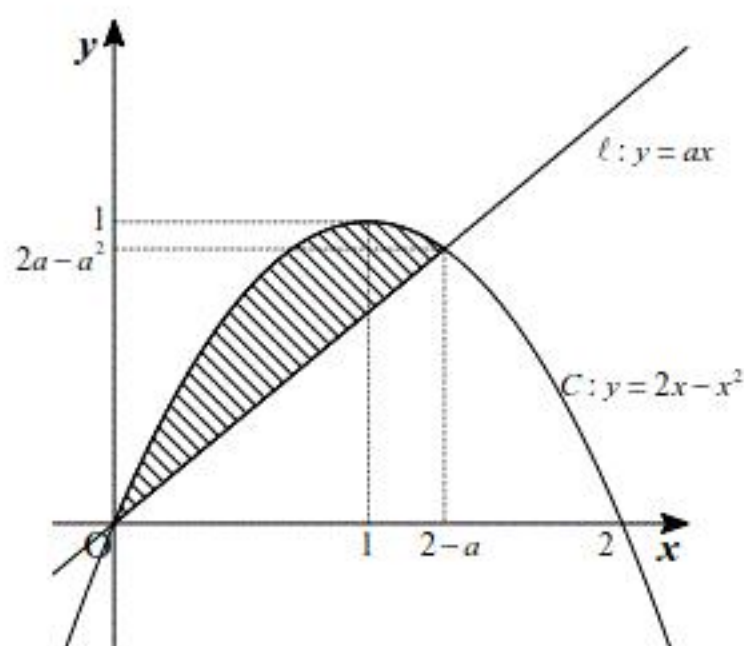
である。

(答) $\frac{5}{12}$

〔補足〕

(2), (3)では「1回目、2回目の整数より大きければ」を「1回目の整数より大きく、かつ2回目の整数より大きければ」と解釈し、「1回目、2回目の整数より小さければ」を「1回目の整数より小さく、または2回目の整数より小さければ」と解釈するかあるいはその逆に解釈しなければ辻褄が合わないため、前者のように解釈した解答例を示した。

(1)



放物線 C と直線 l の交点を考える。 C, l の方程式から y を消去して

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x - (2-a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2-a \end{aligned}$$

が得られ、交点の x 座標は $x=0, 2-a$ である。 $0 < a < 2$ より $0 < 2-a < 2$ であるから、放物線 C と直線 l で囲まれた図形は上図のようになる。したがって、放物線 C と直線 l で囲まれる面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{2-a} (2x - x^2 - ax) dx &= -\int_0^{2-a} x\{x - (2-a)\} dx \\ &= \frac{\{(2-a) - 0\}^3}{6} \\ &= \frac{(2-a)^3}{6} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{(2-a)^3}{6}$$

(2)

放物線 C は x 軸と x 座標が $0, 2$ の点で交わるから、放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積は

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

である。直線 l が、放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を二等分するとき

$$\begin{aligned} \frac{(2-a)^3}{6} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow (2-a)^3 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2-a &= \sqrt[3]{4} \\ \Leftrightarrow a &= 2 - \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2 - \sqrt[3]{4}$$

(1)

$$f(t) = \int_0^t (e^x + e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^t = e^t - e^{-t}$$

である。 $f(1) = 2$ より

$$e^a - e^{-a} = 2$$

$$\Leftrightarrow (e^a)^2 - 2e^a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^a = 1 + \sqrt{2} \quad (\because e^a > 0)$$

$$\therefore a = \log(1 + \sqrt{2})$$

が得られる。

(答) $\log(1 + \sqrt{2})$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + \sqrt{2})^t - (1 + \sqrt{2})^{-t} \\ &= (1 + \sqrt{2})^t - (-1 + \sqrt{2})^t \end{aligned}$$

であるから

$$f(2) = (1 + \sqrt{2})^2 - (-1 + \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}$$

$$f(3) = (1 + \sqrt{2})^3 - (-1 + \sqrt{2})^3 = 14$$

である。

(答) $f(2) = 4\sqrt{2}, f(3) = 14$

(3)

二項定理より

$$f(t) = \sum_{k=0}^t {}_tC_k 2^{\frac{t-k}{2}} - \sum_{k=0}^t {}_tC_k (-1)^k 2^{\frac{t-k}{2}}$$

と変形できる。ここで、 n が正の奇数であるとき、自然数 l を用いて $n = 2l - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=0}^{2l-1} {}_{2l-1}C_k 2^{\frac{2l-1-k}{2}} - \sum_{k=0}^{2l-1} {}_{2l-1}C_k (-1)^k 2^{\frac{2l-1-k}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1}C_{2j} 2^{\frac{2l-1-2j}{2}} + \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1}C_{2j+1} 2^{\frac{2l-1-(2j+1)}{2}} \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1}C_{2j} (-1)^{2j} 2^{\frac{2l-1-2j}{2}} + \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1}C_{2j+1} (-1)^{2j+1} 2^{\frac{2l-1-(2j+1)}{2}} \right\} \\ &= 2 \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1}C_{2j+1} 2^{l-j-1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $j \leq l-1$ であるから ${}_{2l-1}C_{2j+1}, 2^{l-j-1}$ は正の整数である。したがって $f(n)$ は正の偶数である。

(証明終)

(4)

$$f'(t) = a(e^t + e^{-t})$$

であり、 $a \neq 0$ より

$$\frac{f'(m)}{a} = e^{am} + e^{-am} = (1 + \sqrt{2})^m + (-1 + \sqrt{2})^m$$

と変形でき、 m が正の偶数のとき、自然数 l を用いて $m = 2l$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{f'(m)}{a} &= \sum_{k=0}^{2l} {}_{2l}C_k 2^{\frac{2l-k}{2}} + \sum_{k=0}^{2l} {}_{2l}C_k (-1)^k 2^{\frac{2l-k}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^l {}_{2l}C_{2j} 2^{\frac{2l-2j}{2}} + \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1}C_{2j+1} 2^{\frac{2l-(2j+1)}{2}} \right\} \\ &\quad + \left\{ \sum_{j=0}^l {}_{2l}C_{2j} (-1)^{2j} 2^{\frac{2l-2j}{2}} + \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1}C_{2j+1} (-1)^{2j+1} 2^{\frac{2l-(2j+1)}{2}} \right\} \\ &= 2 \sum_{j=0}^l {}_{2l}C_{2j} 2^{l-j} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $j \leq l$ であるから ${}_{2l}C_{2j}, 2^{l-j}$ は正の整数である。したがって $\frac{f'(m)}{a}$ は正の偶数である。

(証明終)