

(1)

 $t = 2^x$ とおくと $t > 0$ であり

$$2t^2 + 5t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)(t+3) = 0$$

が得られる。 $t > 0$ より $t = \frac{1}{2}$ であり、このとき $x = -1$ である。

(答) $x = -1$

(2)

 $\sqrt{2-x^2}$ が実数の範囲で定義される条件は、

$$2-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

である。ここで $x < 0$ より、

$$\begin{aligned} y &= |x|\sqrt{2-x^2} \\ &= -x\sqrt{2-x^2} \end{aligned}$$

と変形でき、

$$\begin{aligned} y' &= -\sqrt{2-x^2} - \frac{-2x}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= -\sqrt{2-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{\sqrt{2-x^2}} \end{aligned}$$

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
y'		$+$	0	$-$	0
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって、 $x = -1$ で y は極大値 1 をとる。(答) $x = -1$ で極大値 1、極小値はなし

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^4} \{ \log(x^2 + x^3) - \log x^2 \} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^3 \cos x} \cdot \log(1+x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cos x (1 + \cos x)} \cdot \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} \cdot \log(1+x)^{\frac{1}{x}} \\ &= 1^3 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \log e \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(1)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0) \cdot (\sqrt{3}, 1, 1) = 4$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 1, 0) \cdot (-1, \sqrt{3}, 0) = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 1, 1) \cdot (-1, \sqrt{3}, 0) = 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

(2)

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 4, |\overrightarrow{AC}|^2 = 5, |\overrightarrow{AD}|^2 = 4$$

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC} + (1-t)\overrightarrow{AD}$$

である。 $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AB}$ より

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{u\overrightarrow{AB} + (v-t)\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AD}\} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4u + 4v - 4t = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、また $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{AC}$ より

$$\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \{u\overrightarrow{AB} + (v-t)\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AD}\} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4u + 5v - 5t = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が得られる。①、②を連立して解くと、 $u=0, v=t$ が得られる。

$$(\text{答}) \quad u=0, v=t$$

(3)

点 P を中心とする球と平面 ABC が接するとき、その接点は点 H に一致する。

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP} = -(1-t)\overrightarrow{AD}$$

$$|\overrightarrow{PH}|^2 = (1-t)^2 \cdot 4$$

である。ここで PH が球の半径であるから

$$r^2 = (1-t)^2 \cdot 4$$

となり、 $r > 0, 1-t > 0$ より

$$r = 2(1-t) \Leftrightarrow t = 1 - \frac{r}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 1 - \frac{r}{2}$$

(1)

$$A(2\cos\theta, 2\sin\theta), B(\cos 2\theta, \sin 2\theta), P(2\cos\theta, 0), Q(\cos 2\theta, 0)$$

であり、また、 $OA=2, OB=1$ であることから、 $0<\theta<\pi$ の条件下、 $\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2}OA \cdot OB \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin(2\theta - \theta) = \sin \theta$$

である。また $\triangle OAB$ に関する余弦定理より

$$AB^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cos \theta = 5 - 4 \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{5 - 4 \cos \theta} \quad (\because AB > 0)$$

である。

$$(\text{答}) \triangle OAB = \sin \theta, AB = \sqrt{5 - 4 \cos \theta}$$

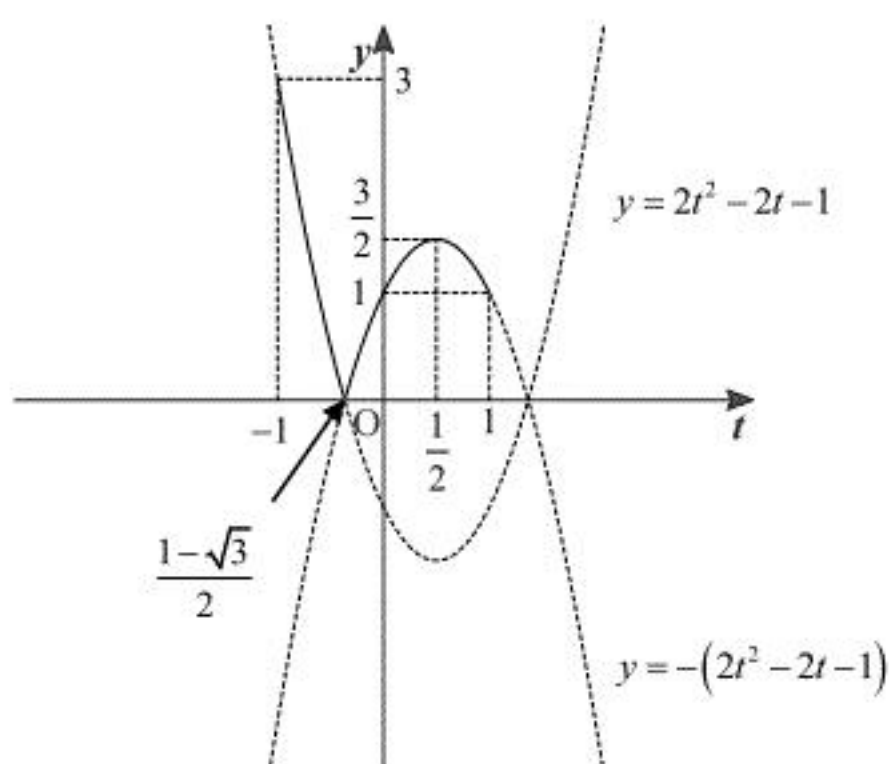
(2)

$$\begin{aligned} PQ &= |\cos 2\theta - 2 \cos \theta| \\ &= |2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1| \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) PQ = |2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1|$$

(3)



$t = \cos \theta$ とおくと $-1 \leq t \leq 1$ であり、 $PQ = |2t^2 - 2t - 1|$ となる。ここで

$$2t^2 - 2t - 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$2t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

であるから、 $-1 \leq t \leq 1$ で $y = |2t^2 - 2t - 1|$ のグラフは上図のようになる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$0 \leq t \leq 1$ であるから、グラフより、 $t = \frac{1}{2}$ で PQ は最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。このとき

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

である。

$$(\text{答}) \theta = \frac{\pi}{3} \text{ で最大値 } \frac{3}{2}$$

(4)

t の値により場合分けを行う。

[1] $-1 \leq t < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$2t^2 - 2t - 1 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 - 8t - 9 = 0$$

$$\therefore t = \frac{2 - \sqrt{22}}{4} \quad (\because -1 \leq t < \frac{1-\sqrt{3}}{2})$$

が得られる。

[2] $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq t \leq 1$ のとき

$$-2t^2 + 2t + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$\therefore t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \quad (\because \frac{1-\sqrt{3}}{2} \leq t \leq 1)$$

が得られる。

$$(\text{答}) \frac{2 - \sqrt{22}}{4}, \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$$

(1)

$$\int_0^a x\sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{5}a^2\sqrt{a}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{5}a^2\sqrt{a}$$

(2)

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

より、 $1 \leq x \leq 3$ における曲線 $y = f(x)$ の長さは

$$\int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{31\sqrt{31} - 13\sqrt{13}}{27}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{31\sqrt{31} - 13\sqrt{13}}{27}$$

(3)

$$\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 = x^2 e^{x-1} - x^3 = x^2(e^{x-1} - x)$$

である。 $h(x) = e^{x-1} - x$ と定義すると

$$h'(x) = e^{x-1} - 1$$

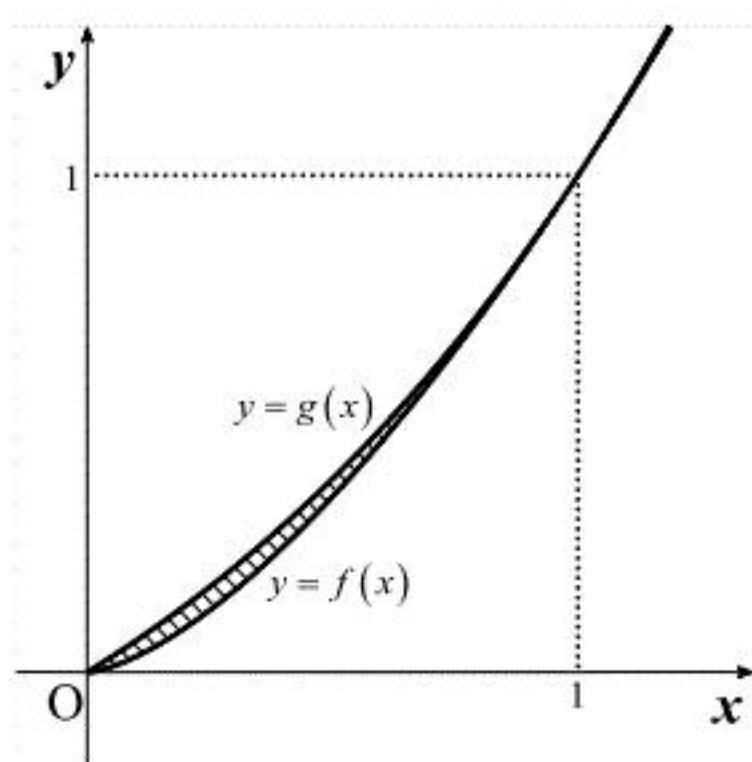
であるから、次の増減表を得る。

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

上表より、 $h(x) \geq 0$ である。したがって、 $x^2 \geq 0$ であることから $x \geq 0$ の範囲で $\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 \geq 0$ であり、等号は $x = 0, 1$ で成立する。また、 $x \geq 0$ の範囲で $f(x) \geq$ $0, g(x) \geq 0$ より、 $f(x) \leq g(x)$ が成立し、等号は $x = 0, 1$ で成立する。

(証明終)

(4)

(3)より、2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた部分は下図の斜線部のようになる。2 曲線 $y = f(x), y = g(x)$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x\sqrt{e^{x-1}} - x\sqrt{x}) dx &= \int_0^1 x\sqrt{e^{x-1}} dx - \int_0^1 x\sqrt{x} dx \\ &= \left[x \cdot 2e^{\frac{x-1}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 2e^{\frac{x-1}{2}} dx - \frac{2}{5} \\ &= 2 - \left[4e^{\frac{x-1}{2}} \right]_0^1 - \frac{2}{5} \\ &= 4e^{-\frac{1}{2}} - \frac{12}{5} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 4e^{-\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}$$

(1)

$$f(t) = \int_0^t (e^x + e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x}]_0^t = e^t - e^{-t}$$

である。 $f(1) = 2$ より

$$e^a - e^{-a} = 2$$

$$\Leftrightarrow (e^a)^2 - 2e^a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^a = 1 + \sqrt{2} \quad (\because e^a > 0)$$

$$\therefore a = \log(1 + \sqrt{2})$$

が得られる。

(答) $\log(1 + \sqrt{2})$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + \sqrt{2})^t - (1 + \sqrt{2})^{-t} \\ &= (1 + \sqrt{2})^t - (-1 + \sqrt{2})^t \end{aligned}$$

であるから

$$f(2) = (1 + \sqrt{2})^2 - (-1 + \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}$$

$$f(3) = (1 + \sqrt{2})^3 - (-1 + \sqrt{2})^3 = 14$$

である。

(答) $f(2) = 4\sqrt{2}, f(3) = 14$

(3)

二項定理より

$$f(t) = \sum_{k=0}^t {}_t C_k 2^{\frac{t-k}{2}} - \sum_{k=0}^t {}_t C_k (-1)^k 2^{\frac{t-k}{2}}$$

と変形できる。ここで、 n が正の奇数であるとき、自然数 l を用いて $n = 2l - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{k=0}^{2l-1} {}_{2l-1} C_k 2^{\frac{2l-1-k}{2}} - \sum_{k=0}^{2l-1} {}_{2l-1} C_k (-1)^k 2^{\frac{2l-1-k}{2}} \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1} C_{2j} 2^{\frac{2l-1-2j}{2}} + \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1} C_{2j+1} 2^{\frac{2l-1-(2j+1)}{2}} \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1} C_{2j} (-1)^{2j} 2^{\frac{2l-1-2j}{2}} + \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1} C_{2j+1} (-1)^{2j+1} 2^{\frac{2l-1-(2j+1)}{2}} \right\} \\ &= 2 \sum_{j=0}^{l-1} {}_{2l-1} C_{2j+1} 2^{l-j-1} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $j \leq l-1$ であるから ${}_{2l-1} C_{2j+1}$, 2^{l-j-1} は正の整数である。したがって $f(n)$ は整数である。

(証明終)