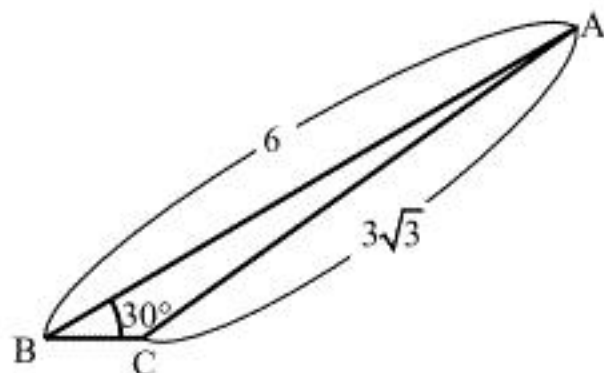
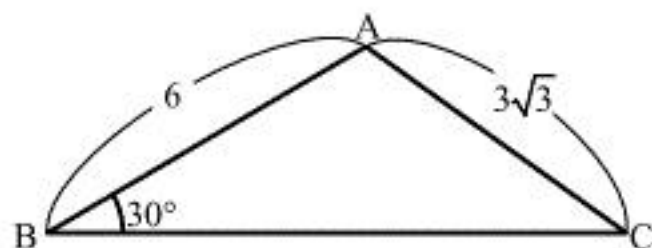


- (1) (大学側が出題ミスと発表していますが、「鋭角三角形 ABC」を「鈍角三角形 ABC」と読みかえた場合の解答例を以下に記します。)



$\triangle ABC$ に関する余弦定理より,

$$(3\sqrt{3})^2 = BC^2 + 6^2 - 2 \cdot BC \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow BC^2 - 6\sqrt{3} \cdot BC + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow BC = 3(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})$$

が得られる。 $BC = 3(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ のとき,

$$\begin{aligned} BC^2 - (AB^2 + AC^2) &= (3\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 - (36 + 27) \\ &= 18\sqrt{6} - 18 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから、 $BC^2 > AB^2 + AC^2$ が成立するため、 $\triangle ABC$ は鈍角三角形である。

$BC = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ のとき,

$$\begin{aligned} AB^2 - (BC^2 + AC^2) &= 36 - \{27 + (3\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2\} \\ &= 18\sqrt{6} - 36 \\ &> 18(\sqrt{6} - 2) \\ &> 0 \end{aligned}$$

(1)

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}, \overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ} \\ &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-t)^2\vec{a} + 2t(1-t)\vec{b} + t^2\vec{c} \\ &= (1-t)^2(-2, 1) + 2t(1-t)(3, -4) + t^2(7, -1) \\ &= (-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)\end{aligned}$$

であるから、 $R(-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)$ となる。

$$(\text{答}) R(-t^2 + 10t - 2, 8t^2 - 10t + 1)$$

(3)

$$\overrightarrow{BC} = (4, 3), \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OR} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OR} &= 0 \\ \Leftrightarrow -4t^2 + 40t - 8 + 24t^2 - 30t + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 20t^2 + 10t - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 + 2t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

が得られるが、 $0 < t < 1$ より $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ である。

$$(\text{答}) \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

(1)

玉に書かれた4個の整数を大きいほうから a, b, c, d とする。方針Aを採用したとき、最後の試行で取った玉に書かれた整数が a であるためには、1回目で b, c, d のいずれかを取り出し、2回目で a を取り出せばよいから、求める確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}$

(2)

方針Bを採用したとき、何回目が最後の試行になるかで場合分けを行う。

[1] 1回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

方針Bでは1回目の試行ではやめないなので最後の試行とはならない。

[2] 2回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1回目で b, c, d のいずれかを取り出し、2回目で a を取り出せばよいから求める確率は

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

である。

[3] 3回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1, 2回目で b, c, d のいずれか2個を取り出すが、2回目の整数が1回目の整数より小さい必要があるから、組み合わせのみを考えればよく、求める確率は

$${}_3C_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

である。

[4] 4回目に a を取り出し、最後の試行となるとき

1, 2, 3回目で b, c, d を取り出すが、その取り出す順番は、 $(b, c, d), (b, d, c)$ のいずれかであるから求める確率は

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{12}$$

である。

以上[1], [2], [3], [4]より、方針Bを採用したとき最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{11}{24}$$

である。

(答) $\frac{11}{24}$

(3)

方針Cを採用したとき、最後の試行になるのは3回目か4回目でありこれらの場合分けして考える。

[1] 3回目が最後の試行になるとき

1, 2回目は b, c, d のうち2個を取り出すから、求める確率は

$${}_3P_2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。

[2] 4回目が最後の試行になるとき

1, 2, 3回目の取り出す順番は $(b, c, d), (c, b, d), (b, d, c), (d, b, c)$ であるから、求める確率は

$$4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

である。

以上[1], [2]より、方針Cを採用したとき最後の試行で取った玉に書かれた整数が a である確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

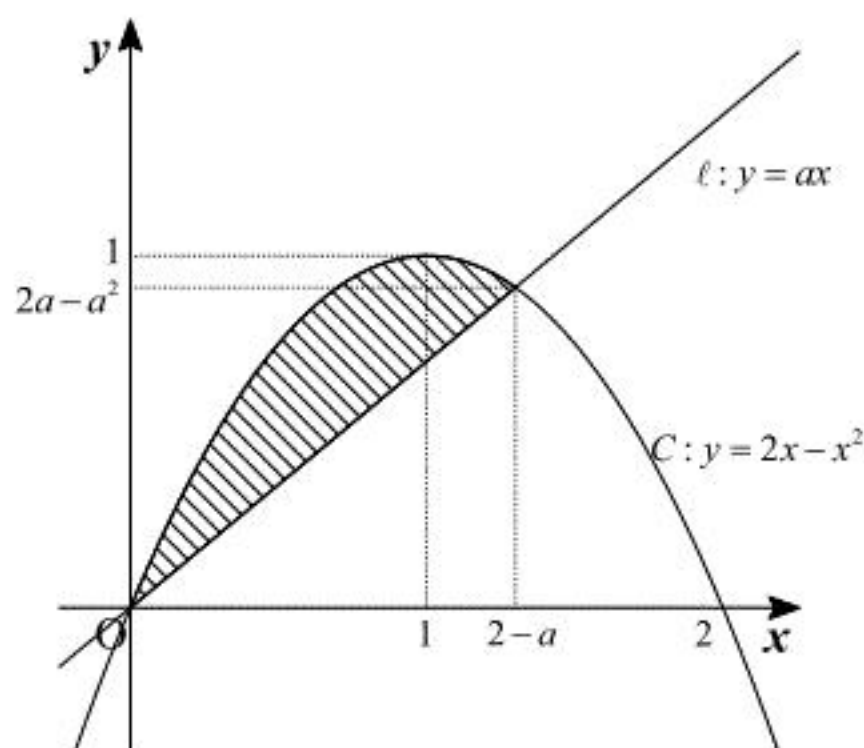
である。

(答) $\frac{5}{12}$

〔補足〕

(2), (3)では「1回目、2回目の整数より大きければ」を「1回目の整数より大きく、かつ2回目の整数より大きければ」と解釈し、「1回目、2回目の整数より小さければ」を「1回目の整数より小さく、または2回目の整数より小さければ」と解釈するか、あるいはその逆で解釈しなければ辻褄が合わないため、前者のように解釈した解答例を示した。

(1)



放物線 C と直線 ℓ の交点を考える。 C, ℓ の方程式から y を消去して

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &= ax \\ \Leftrightarrow x\{x - (2-a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2-a \end{aligned}$$

が得られ、交点の x 座標は $x=0, 2-a$ である。 $0 < a < 2$ より $0 < 2-a < 2$ であるから、放物線 C と直線 ℓ で囲まれた図形は上図のようになる。したがって、放物線 C と直線 ℓ で囲まれる面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{2-a} (2x - x^2 - ax) dx &= -\int_0^{2-a} x\{x - (2-a)\} dx \\ &= \frac{\{(2-a) - 0\}^3}{6} \\ &= \frac{(2-a)^3}{6} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{(2-a)^3}{6}$$

(2)

放物線 C は x 軸と x 座標が $0, 2$ の点で交わるから、放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積は

$$\int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

である。直線 ℓ が、放物線 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を二等分するとき

$$\begin{aligned} \frac{(2-a)^3}{6} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow (2-a)^3 &= 4 \\ \Leftrightarrow 2-a &= \sqrt[3]{4} \\ \Leftrightarrow a &= 2 - \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad 2 - \sqrt[3]{4}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 5 &= (x^2 + 2x + 2)x^2 + 2x^3 + 2x^2 + 5 \\
 &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x) - 2x^2 - 4x + 5 \\
 &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x - 2) + 9
 \end{aligned}$$

より、整式 A を整式 B で割った商は $x^2 + 2x - 2$ で余りは 9 である。

(答) 商は $x^2 + 2x - 2$ 、余りは 9

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}
 A &= B(B - 4) + 9 \\
 &= B^2 - 4B + 9
 \end{aligned}$$

である。

(答) $B^2 - 4B + 9$

(3)

$$\begin{aligned}
 B &= x^2 + 2x + 2 \\
 &= (x + 1)^2 + 1 \\
 &\geq 1
 \end{aligned}$$

が成立する。(2)より

$$\frac{A}{B} = B - 4 + \frac{9}{B}$$

であることから、 $B, \frac{9}{B} > 0$ であるから、相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{B} &\geq 2\sqrt{B \cdot \frac{9}{B}} - 4 \\
 &\Leftrightarrow \frac{A}{B} \geq 2
 \end{aligned}$$

と変形でき、等号は $B = \frac{9}{B}$ すなわち $B = 3$ で成立する。ここで

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x + 2 &= 3 \\
 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= -1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

が得られるから、 $x = -1 \pm \sqrt{2}$ で $\frac{A}{B}$ は最小値 2 をとる。

(答) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ で最小値 2