

1

(1)

$11101011_{(2)}$ を10進法で表すと、

$$11101011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 235$$

である。ここで、

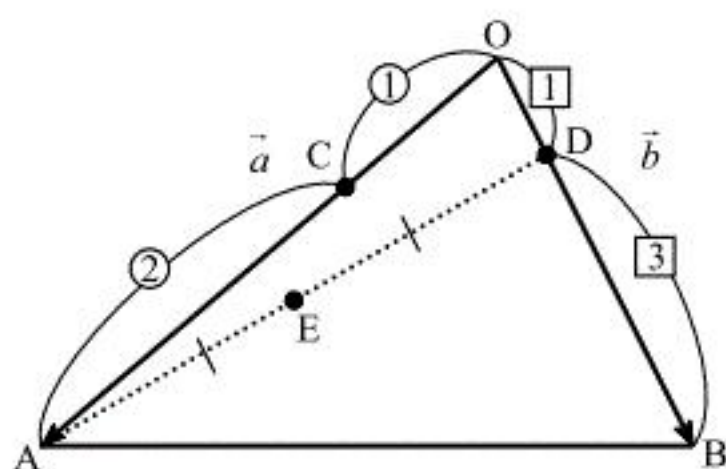
$$235 = 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 0 \cdot 5^0$$

であるから、5進法で表すと $1420_{(5)}$ である。

(答) $1420_{(5)}$

(2)

以下に、 $\triangle OAB$ および点 C, D, E を図示する。



条件より、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b}$$

であるから、

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b}$

(3)

$x^2 - ax + 2a - 3 = 0$ が実数解を持つ条件は、判別式を D とすると、

$$D \geq 0$$

$$a^2 - 4(2a - 3) \Leftrightarrow \geq 0$$

$$(a - 2)(a - 6) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 2, 6 \leq a$$

である。よって、さいころを投げて出た目が1, 2, 6である確率を求めればよい。ここで、さいころの目の出方は1~6の6通りあり、それらは同様に確からしい。したがって、求める確率

は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。

(答) $\frac{1}{2}$

(1)

与えられた条件より,

$$a_n = d(n-1) + 5$$

$$b_n = 2 \cdot r^{n-1}$$

と表せる。ここで,

$$\begin{cases} c_2 = a_2 - b_2 = d + 5 - 2r = 5 & \dots \textcircled{1} \\ c_3 = a_3 - b_3 = 2d + 5 - 2r^2 = -1 & \dots \textcircled{2} \\ c_4 = a_4 - b_4 = 3d + 5 - 2r^3 = -31 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成立し, ①から $d = 2r$ とわかる。これを, ②, ③に代入すると,

$$\begin{cases} 4r + 5 - 2r^2 = -1 \\ 6r + 5 - 2r^3 = -31 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(r+1)(r-3) = 0 \\ 2(r-3)(r^2 + 3r + 6) = 0 \end{cases}$$

が得られる。以上のすべてを満たす r, d の値は, $r = 3, d = 6$ である。

(答) $r = 3, d = 6$

(2)

(1)の結果より,

$$a_n = 6(n-1) + 5$$

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$$

であるから, $c_n = a_n - b_n = 6n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ である。

(答) $c_n = 6n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

(3)

(2)の結果より,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n c_k \\ &= \sum_{k=1}^n (6k - 2 \cdot 3^{k-1} - 1) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} - n \\ &= 3n^2 + 2n - 3^n + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_n = 3n^2 + 2n - 3^n + 1$

(1)

m を素因数分解すると、 $m = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$ となる。 $m = (2^2 \cdot 3)^3 \cdot 3 \cdot 5$ より mn が立方数となるとき、 n は自然数 n' を用いて $n = 3^2 \cdot 5^2 \cdot n'^3$ と表せることがわかる。したがって、条件を満たす最小の自然数 n は $n' = 1$ のときで、 $n = 3^2 \cdot 5^2 = 225$ である。

(答) $n = 225$

(2)

(1)より $1^3, 2^3, (2^2)^3, 3^3, (2 \cdot 3)^3, (2^2 \cdot 3)^3$ が m の正の約数で、かつ立方数でもあるものであるから、求める個数は6個である。

(答) 6個

(3)

(2)と同様に考えると、 $2^k m = 2^{6+k} \cdot 3^4 \cdot 5$ より、 2^{6+k} の正の約数でかつ立方数となるものが6個となる条件を考えればよい。このとき、 $(2^5)^3 \leq 2^{6+k} < (2^6)^3$ を満たすから、

$$15 \leq 6+k < 18$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq k < 12$$

より、条件を満たす最大の k は $k = 11$ である。

(答) $k = 11$

(1)

直線 $ax+by+c=0$ が原点を中心とする半径 r の円 C_2 と接しているから、直線 $ax+by+c=0$

と原点との距離が円 C_2 の半径 r に等しい。したがって、 $r=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2)

$r=1$ のとき、

$$C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$C_2: x^2 + y^2 = 1$$

である。 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ のとき $y' = -x$ であるから、放物線 C_1 上の点 $\left(t, -\frac{1}{2}t^2 - 1\right)$ における接線の方程式は、

$$y = -t(x-t) - \frac{1}{2}t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow y = -tx + \frac{t^2}{2} - 1$$

となる。この直線が円 C_2 とも接する条件は、(1)の結果において、

$$a = -t, b = -1, c = \frac{t^2}{2} - 1, r = 1$$

を代入したものであるから、

$$\frac{\left|\frac{t^2}{2} - 1\right|}{\sqrt{t^2 + 1}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{t^2}{2} - 1\right| = \sqrt{t^2 + 1}$$

となる。両辺正であるから両辺2乗して、

$$\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)^2 = t^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 4 = 4t^2 + 4$$

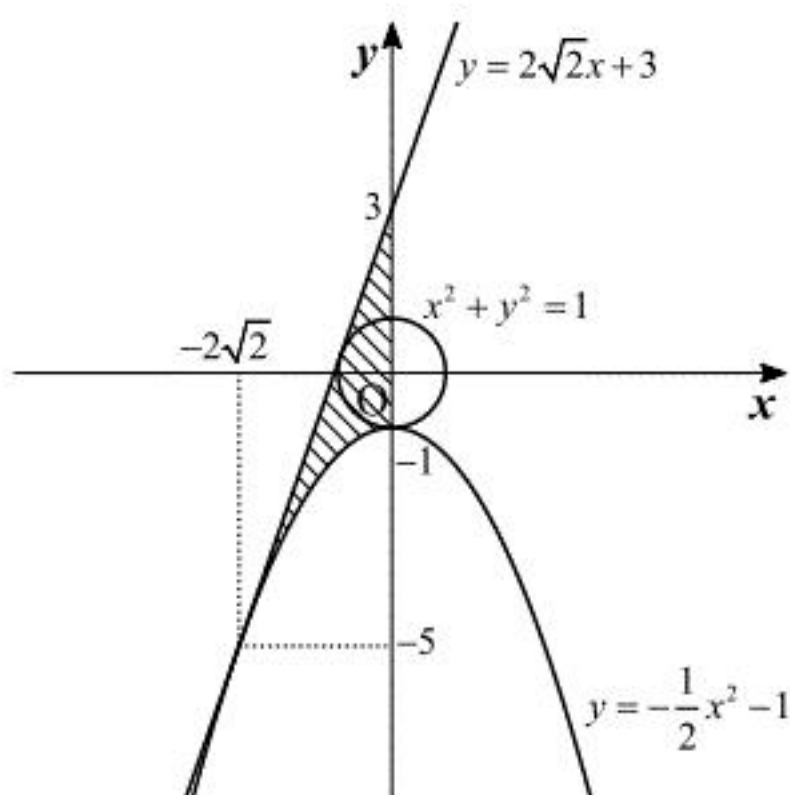
$$\Leftrightarrow t^2(t^2 - 8) = 0$$

である。 $x < 0$ の範囲で接する条件から、これを $t < 0$ のもとで解くと $t = -2\sqrt{2}$ である。したがって、直線 l の方程式は $y = 2\sqrt{2}x + 3$ である。

$$(\text{答}) \quad l: y = 2\sqrt{2}x + 3$$

(3)

以下に、直線 l 、放物線 C_1 および円 C_2 を図示する。ここで、求める面積を S とすると、 S は以下の斜線部の面積である。



3点 $(-2\sqrt{2}, -5)$, $(0, 3)$, $(0, -5)$ を頂点とする直角三角形に注目すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 8 - \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left\{ \left(-\frac{x^2}{2} - 1 \right) - (-5) \right\} dx \\ &= 8\sqrt{2} + \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left(\frac{x^2}{2} - 4 \right) dx \\ &= 8\sqrt{2} + \left[\frac{x^3}{6} - 4x \right]_{-2\sqrt{2}}^0 \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{8\sqrt{3}}{3}$$