

1

(1)

2進法で11101011と表される数を10進法で表すと、

$$\begin{aligned} 11101011_{(2)} &= 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^5 \cdot 1 + 2^6 \cdot 1 + 2^7 \cdot 1 \\ &= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + 128 \\ &= 235 \end{aligned}$$

となる。10進法で235と表される数を5進法で表すと、

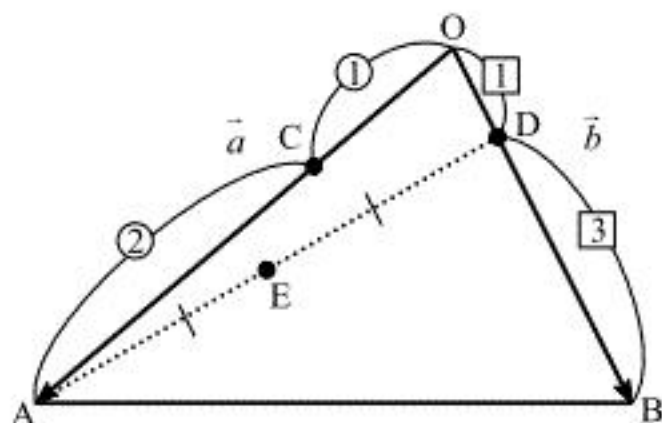
$$235 = 5^3 \cdot 1 + 5^2 \cdot 4 + 5^1 \cdot 2 + 5^0 \cdot 0$$

より、 $235 = 1420_{(5)}$ である。

(答) $1420_{(5)}$

(2)

以下に、 $\triangle OAB$ および点C, D, Eを図示する。



点Cは辺OAを1:2に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3} \vec{a}$$

であり、点Dは辺OBを1:3に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{4} \vec{b}$$

である。また、点Eは線分ADの midpoint であるから、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) - \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} \right) - \frac{1}{3} \vec{a} \\ &= \frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{8} \vec{b} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{8} \vec{b}$

(3)

2次方程式 $x^2 - ax + 2a - 3 = 0$ が実数解を持つ条件は、判別式を考えると、

$$\begin{aligned} a^2 - 4(2a - 3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a + 12 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 2)(a - 6) &\geq 0 \\ \therefore a \leq 2, 6 \leq a \end{aligned}$$

である。さいころの目の中でこれを満たす数は1, 2, 6である。よって、求める確率は1個のさいころを投げて1, 2, 6が出る確率である。ここで、さいころの目の出方は1~6の6通りあり、

それらは同様に確からしい。したがって、求める確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。

(答) $\frac{1}{2}$

(1)

数列 $\{a_n\}$ の公差を d としたとき、初項が5であるから、数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n について、

$$a_n = 5 + d(n-1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。数列 $\{b_n\}$ の公比を r としたとき、初項が2であるから、数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n について、

$$b_n = 2 \cdot r^{n-1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②および $c_2 = 5$ より、

$$\begin{aligned} c_2 &= 5 \\ \Leftrightarrow a_2 - b_2 &= 5 \\ \Leftrightarrow (5 + d) - 2r &= 5 \\ \Leftrightarrow d &= 2r \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。同様に $c_3 = -1$ より、

$$\begin{aligned} c_3 &= -1 \\ \Leftrightarrow a_3 - b_3 &= -1 \\ \Leftrightarrow (5 + 2d) - 2r^2 &= -1 \\ \Leftrightarrow 2r^2 - 2d - 6 &= 0 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。③および④より、

$$\begin{aligned} 2r^2 - 4r - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r+1)(r-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -1, 3 \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} c_4 &= -31 \\ \Leftrightarrow a_4 - b_4 &= -31 \\ \Leftrightarrow (5 + 3d) - 2r^3 &= -31 \\ \Leftrightarrow 2r^3 - 3d - 36 &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $d = 2r$ を代入して、

$$\begin{aligned} 2r^3 - 6r - 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow r^3 - 3r - 18 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $r = -1$ は $r^3 - 3r - 18 = 0$ の解ではなく、 $r = 3$ は $r^3 - 3r - 18 = 0$ の解である。よって、 $r = 3$ であり、③より $d = 6$ である。

(答) $d = 6, r = 3$

(2)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + 6(n-1) = 6n - 1 \\ b_n &= 2 \cdot 3^{n-1} \end{aligned}$$

である。よって、数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n について、

$$\begin{aligned} c_n &= a_n - b_n \\ &= (6n - 1) - 2 \cdot 3^{n-1} \\ &= 6n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $c_n = 6n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n c_k \\ &= \sum_{k=1}^n (6k - 2 \cdot 3^{k-1} - 1) \\ &= 6 \sum_{k=1}^n k - 2 \sum_{k=1}^n 3^{k-1} - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 6 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \\ &= 3n^2 + 2n - 3^n + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_n = 3n^2 + 2n - 3^n + 1$

(1)

ある立方数 l について、 l の素因数 $p_1, p_2, p_3, \dots$ および正の整数 $k_1, k_2, k_3, \dots$ を用いて、 l を素数の積の形で表すと

$$l = p_1^{3k_1} \cdot p_2^{3k_2} \cdot p_3^{3k_3} \cdots$$

と表される。よって、 $m = 25920 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$ について、 mn が立方数となるような自然数 n の中で最小のものは $n = 3^2 \cdot 5^2 = 225$ である。

(答) $n = 225$

(2)

(1)より、 m の正の約数で、かつ立方数である数は

$$2^{3a} \cdot 3^{3b} \quad (a = 0, 1, 2, b = 0, 1)$$

と表される。 m について、 a は $0, 1, 2$ の3通り、 b は $0, 1$ の2通りであるから、求める個数は $3 \cdot 2 = 6$ 個である。

(答) 6 個

(3)

(2)と同様に考えると $2^k m = 2^{6+k} \cdot 3^4 \cdot 5$ であるから、 $2^k m$ の正の約数で、かつ立方数であるものは $2^{3\alpha} \cdot 3^{3\beta}$ ($\beta = 0, 1$) で表される。問題文より、これが12個あるから $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ となると

き条件を満たす。このとき、 $(2^5)^3 \leq 2^{6+k} < (2^6)^3$ を満たすから、

$$15 \leq 6+k < 18$$

$$\Leftrightarrow 9 \leq k < 12$$

となるから、最大となる k は11である。

(答) $k = 11$

(1)

直線 $ax+by+c=0$ が円 $C_2: x^2+y^2=r^2$ に接するとき、直線 $ax+by+c=0$ と原点の距離が r であるから、点と直線の距離の公式より、

$$r = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2)

$r=1$ のとき、放物線 $C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 、円 $C_2: x^2 + y^2 = 1$ である。 $\left(-\frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = -x$ より、 t を実数として、点 $\left(t, -\frac{1}{2}t^2 - 1\right)$ における放物線 C_1 の接線の式は、

$$y = (-t)(x - t) + \left(-\frac{1}{2}t^2 - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow y = -tx + \frac{1}{2}t^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -tx - y + \frac{1}{2}t^2 - 1 = 0$$

となる。直線 $-tx - y + \frac{1}{2}t^2 - 1 = 0$ が円 C_2 にも接する条件は、(1)より、 $1 = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ の式に

$a = -t, b = -1, c = \frac{1}{2}t^2 - 1$ を代入して、

$$1 = \frac{\left|\frac{1}{2}t^2 - 1\right|}{\sqrt{(-t)^2 + (-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 1} = \left|\frac{1}{2}t^2 - 1\right|$$

となる。両辺正であるから両辺 2 乗して

$$t^2 + 1 = \left|\frac{1}{2}t^2 - 1\right|^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 1 = \frac{1}{4}t^4 - t^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}t^4 - 2t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2(t^2 - 8) = 0$$

を得る。ここで、直線 l は $x < 0$ の範囲において放物線 C_1 および円 C_2 に接するから、 $t < 0$ より $t = -2\sqrt{2}$ である。よって、直線 l の方程式は

$$y = 2\sqrt{2}x + \frac{1}{2}(-2\sqrt{2})^2 - 1$$

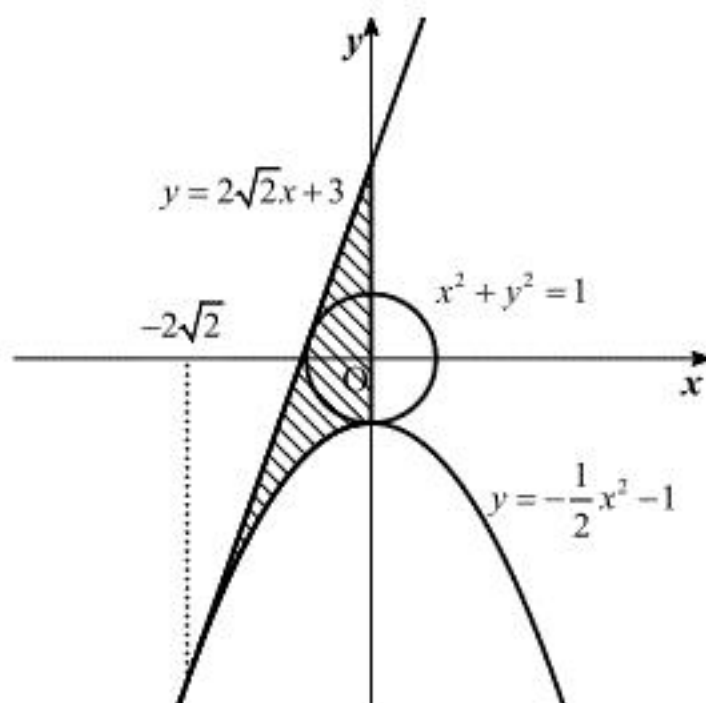
$$\Leftrightarrow y = 2\sqrt{2}x + 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 2\sqrt{2}x + 3$$

(3)

直線 l と放物線 C_1 および円 C_2 を以下に図示する。ここで、直線 l と放物線 C_1 および y 軸で囲まれる部分は、下図の斜線部のようになる。



$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left\{ (2\sqrt{2}x + 3) - \left(-\frac{1}{2}x^2 - 1\right) \right\} dx &= \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left\{ \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 + \sqrt{2}x^2 + 4x \right]_{-2\sqrt{2}}^0 \\ &= -\left(-\frac{8\sqrt{2}}{3} + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

(1)

まず、真数条件より曲線 $C: y = \log 2x$ の定義域は $x > 0$ である。 $(\log 2x)' = \frac{(2x)'}{2x} = \frac{1}{x}$ より、 t を正の実数として、曲線 $C: y = \log 2x$ 上の点 $(t, \log 2t)$ における接線の方程式は、

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log 2t$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{t}x + \log 2t - 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。これが原点を通るとき、

$$0 = \log 2t - 1$$

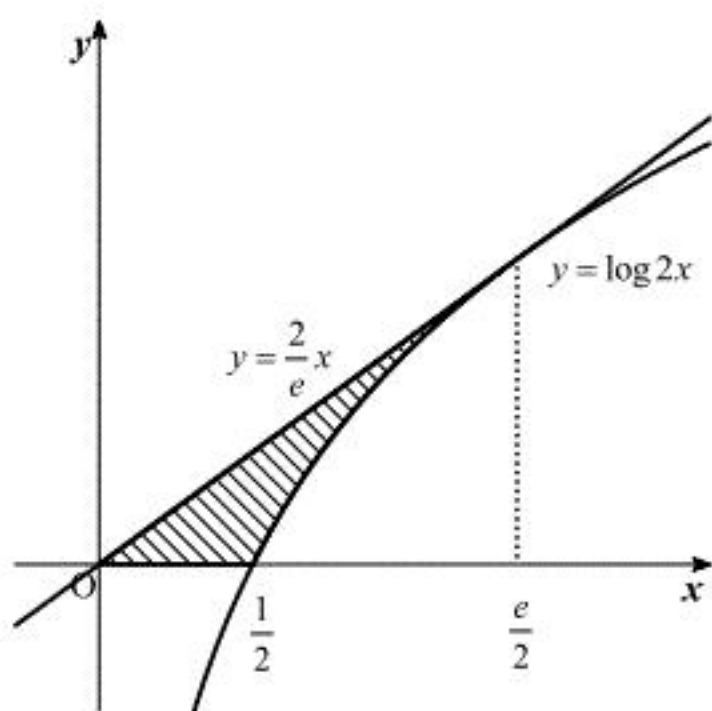
$$\Leftrightarrow t = \frac{e}{2}$$

であるから、直線 l の方程式は①に $t = \frac{e}{2}$ を代入した $y = \frac{2}{e}x$ である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{2}{e}x$$

(2)

(1)より、曲線 C と x 軸の交点の x 座標は $\log 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ である。以下に、接線 l と曲線 C を図示する。接線 l と x 軸および曲線 C で囲まれた部分は、次図の斜線部のとおりである。



斜線部の面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(\frac{2}{e}x - \log 2x \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{e}x dx &= \int_0^{\frac{e}{2}} \frac{2}{e}x dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} (x)' \log 2x dx \\ &= \frac{1}{e} \left[x^2 \right]_0^{\frac{e}{2}} - \left\{ \left[x \log 2x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x (\log 2x)' dx \right\} \\ &= \frac{1}{e} \left[x^2 \right]_0^{\frac{e}{2}} - \left\{ \left[x \log 2x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} x \cdot \frac{(2x)'}{2x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{e} \left[x^2 \right]_0^{\frac{e}{2}} - \left\{ \left[x \log 2x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} 1 dx \right\} \\ &= \frac{1}{e} \left[x^2 \right]_0^{\frac{e}{2}} - \left\{ \left[x \log 2x - x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \right\} \\ &= \frac{e}{4} - \left\{ \left(\frac{e}{2} - \frac{e}{2} \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{e}{4} - \frac{1}{2}$$