

(1)

加法定理を用いると,

$$\begin{aligned} & \sin\{(n+1)\theta\} + \sin\{(n-1)\theta\} \\ &= \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos\theta - \cos(n\theta)\sin\theta \\ &= 2\sin(n\theta)\cos\theta \end{aligned}$$

である。

(答) $2\sin(n\theta)\cos\theta$

(2)

0 ではない実数 h に対して $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h-|h|}{h}$ である。いま,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h-h}{h} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{h+h}{h} = 2 \end{aligned}$$

となるから, 右側極限と左側極限が一致せず極限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在しない。よって,

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。

(証明終)

(3)

部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} \int_1^e x^3 \log x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^4}{4} \right)' \log x dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^4}{4} - \int_1^e \frac{x^3}{4} dx \\ &= \frac{e^4}{4} - \left[\frac{x^4}{16} \right]_1^e \\ &= \frac{3e^4+1}{16} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3e^4+1}{16}$

(1)

$\vec{c} = (p, q, r)$ とおく。ただし、 p, q, r は $|\vec{c}| = 3$ より

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす実数である。 $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は垂直であるから、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2, 1, 0) \cdot (p, q, r) &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= -2p \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成立する。また、 $\vec{b}$ と $\vec{c}$ も垂直であるから、

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2, 1, 2) \cdot (p, q, r) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= p - \frac{1}{2}q \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成立する。②、③を用いて①から q, r を消去すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{p^2 + (-2p)^2 + (2p)^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{p^2} &= 1 \\ \therefore p &= \pm 1 \end{aligned}$$

が得られる。以上より、 $(p, q, r) = (1, -2, 2), (-1, 2, -2)$ である。

(答) $\vec{c} = (1, -2, 2), (-1, 2, -2)$

(2)

$\vec{u}$ と $\vec{c}$ が平行で、かつ $|\vec{u}| = 1, |\vec{c}| = 3$ であるから、 $\vec{u} = \pm \frac{1}{3}\vec{c}$ を満たす。よって、(1)より

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ となる。}$$

(答) $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

(3)

点 K は直線 m 上の点であるから、直線 m の方向ベクトルの1つである $\vec{c}$ 、および実数 k を用いて $\overrightarrow{OK} = k\vec{c}$ と表すことができる。条件より $\overrightarrow{DK}$ と $\vec{c}$ は垂直であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DK} \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OD}) \cdot \vec{c} &= 0 \\ \Leftrightarrow (k\vec{c} - \overrightarrow{OD}) \cdot \vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

を満たす。ここで、 $\vec{c} = (1, -2, 2)$ の場合のみを考えても一般性を失わないから、

$$\begin{aligned} (k-3, -2k-1, 2k-2) \cdot (1, -2, 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-3) \cdot 1 + (-2k-1) \cdot (-2) + (2k-2) \cdot 2 &= 0 \\ \therefore k &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

が得られる。求める長さは、

$$|\overrightarrow{OK}| = k|\vec{c}| = \frac{5}{9} \cdot 3 = \frac{5}{3}$$

である。

(答) $\frac{5}{3}$

(1)

与えられた数列の一般項は、 $a_n = a + (n-1)d$ ($n=1, 2, \dots, 6$) である。和の条件より、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^6 a_n &= 738 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^6 \{a + (n-1)d\} &= 738 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \{a + (a+5d)\} &= 738 \\ \therefore 2a + 5d &= 246\end{aligned}$$

が得られる。

(答) $2a + 5d = 246$

(2)

(1)の等式を

$$5d = 2(123 - a)$$

と変形すると、右辺が偶数であることと2と5が互いに素であることから

$$d \text{ は偶数} \quad \dots \text{①}$$

と分かる。さて、公差 d が自然数であるから、 a_n は n に関して単調増加である。よって題意より

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_6 \leq 200$$

が成り立つ。 $a_1 = a$ は自然数であり必ず $a_1 \geq 1$ を満たすから、この不等式が成立するのは

$$\begin{aligned}a_6 &\leq 200 \\ \Leftrightarrow a + 5d &\leq 200\end{aligned}$$

を満たすときである。(1)より $a = \frac{246-5d}{2}$ であるから、 a を消去すると、

$$\begin{aligned}\frac{246-5d}{2} + 5d &\leq 200 \\ \therefore d &\leq \frac{154}{5}\end{aligned}$$

となる。この範囲では $a = \frac{246-5d}{2} \geq 1$ は常に成立するから、自然数である d は $1 \leq d \leq \frac{154}{5}$

の範囲を考えれば十分である。①の条件もあわせて考えると、 d のとりうる値は、

$$d = 2, 4, 6, \dots, 30$$

である。以上より、題意を満たす d として例えば $d = 2$ が挙げられ、そのとき

$a = \frac{246-5 \cdot 2}{2} = 118$ となる。数列としては118, 120, 122, 124, 126, 128となり、これはたしかに題意を満たす。

(答) 118, 120, 122, 124, 126, 128, 初項 $a = 118$, 公比 $d = 2$

(3)

(2)の議論より、題意を満たす d は $d = 2, 4, 6, \dots, 30$ の15通りしか存在しない。また、この d

それぞれに対して $a = \frac{246-5d}{2}$ であるから、 a はただ1通りに定まり、数列も1通りに定まる。

よって、条件を満たす数列の個数、すなわち条件を満たす (a, d) の組の個数は15個である。

(答) 15個

(1)

円 C は点 $A(1, \sqrt{3})$ を通るから,

$$1^2 + (\sqrt{3})^2 + a \cdot 1 - 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 4 = 0$$

$$\therefore a = 4$$

となる。

(答) $a = 4$

(2)

(1)より, 円 C の方程式は

$$x^2 + y^2 + 4x - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$$

と変形できる。よって, 円 C の中心の座標は $(-2, 2\sqrt{3})$, 半径は $2\sqrt{3}$ である。

(答) 中心: $(-2, 2\sqrt{3})$, 半径: $2\sqrt{3}$

(3)

接線 l の式は,

$$(1+2)(x+2) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{3})(y - 2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^2$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x$$

である。

(答) $y = \sqrt{3}x$

(1)

曲線 C について,

$$y' = \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{1}{x}$$

であるから、接点の座標を $(t, \log 2t)$ ($t > 0$) とおくと、接線の方程式は

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log 2t$$

となる。接線 l は原点を通るから、上式に $x = y = 0$ を代入して

$$0 = -1 + \log 2t$$

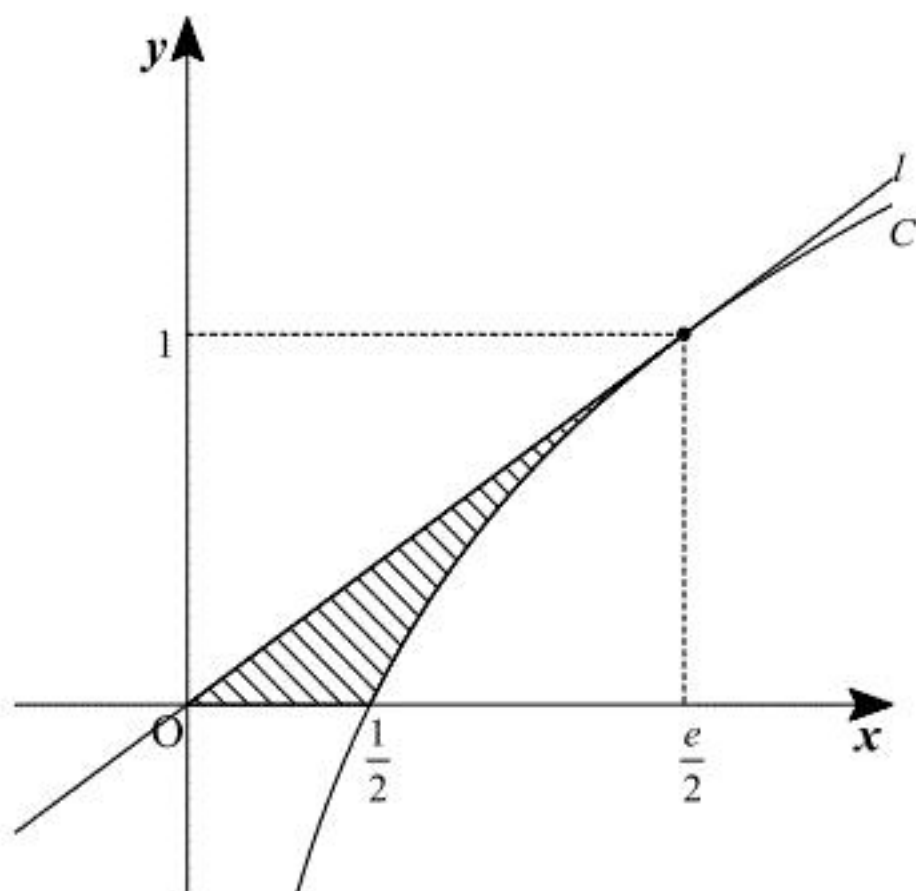
$$\therefore t = \frac{e}{2}$$

が得られる。したがって接線 l の方程式は $y = \frac{2}{e}x$ である。

(答) $l: y = \frac{2}{e}x$

(2)

曲線 C と接線 l の接点の座標は、(1)より $\left(\frac{e}{2}, 1\right)$ と求められる。よって、接線 l と x 軸および曲線 C で囲まれた図形は以下の斜線部のようになる。



図より、斜線部の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \log 2x dx &= \frac{e}{4} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} (x)' \log 2x dx \\ &= \frac{e}{4} - [x \log 2x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} dx \\ &= \frac{e}{4} - \frac{e}{2} + [x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \\ &= \frac{e-2}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{e-2}{4}$