

数 学

300 点

9 時 00 分 ～ 10 時 30 分 (90 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は、1 から 4 までの計 4 問です。1 から 4 のすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は 4 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答開始の合図があった後に、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入しなさい。
5. 印刷不鮮明及びページの落丁・乱丁等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
7. 試験終了後、問題冊子及び解答用紙の表紙は持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 2進法で 11101011(2) と表される数を 5進法で表せ。

(2) 三角形 OAB において、辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C、辺 OB を 1 : 3 に内分する点を D、線分 AD の中点を E とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。このとき、 $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 1 個のさいころを投げて出た目を a とするとき、2 次方程式

$$x^2 - ax + 2a - 3 = 0$$

が実数の解をもつ確率を求めよ。

2 初項が5である等差数列 $\{a_n\}$ と、初項が2である等比数列 $\{b_n\}$ がある
($n = 1, 2, 3, \dots$)。数列 $\{c_n\}$ が $c_n = a_n - b_n$, $c_2 = 5$, $c_3 = -1$, $c_4 = -31$ で
定められるとき、次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の公差 d と数列 $\{b_n\}$ の公比 r を求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

3 ある自然数の3乗になっている数を立方数と呼ぶことにする。例えば、 $1 = 1^3$ 、 $8 = 2^3$ 、 $216 = 6^3 = 2^3 \cdot 3^3$ などは立方数である。自然数 $m = 25920$ について、次の問いに答えよ。

- (1) mn が立方数となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) m の正の約数で、かつ立方数でもあるものの個数を求めよ。
- (3) $2^k m$ の正の約数で、かつ立方数でもあるものが12個となるような自然数 k のうち、最大のものを求めよ。

4 $x < 0$ の範囲において、直線 l が

放物線 $C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 - r$ と円 $C_2: x^2 + y^2 = r^2$

の両方に接している。ただし、 $r > 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 円 C_2 に接する直線の方程式を $ax + by + c = 0$ とするとき、 r を a, b, c を用いて表せ。ただし、 a, b, c は定数とする。

(2) $r = 1$ のとき、直線 l の方程式を求めよ。

(3) $r = 1$ のとき、直線 l と放物線 C_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。