

平成30年度岩手大学一般入試(前期日程) 数学(理工学部) 解答例

1

(解答例)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sin\{(n+1)\theta\} + \sin\{(n-1)\theta\} \\
 &= \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos\theta - \cos(n\theta)\sin\theta \\
 &= 2\sin(n\theta)\cos\theta
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(x) = x - |x| \text{ と考えられるので, } \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1 - \frac{|h|}{h} \text{ である。ここで}$$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \left(1 - \frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow +0} \left(1 - \frac{h}{h}\right) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \left(1 - \frac{|h|}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow -0} \left(1 - \frac{(-h)}{h}\right) = 2$$

であるから, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ は存在しない。よって $f(x)$ は $x=0$ で微分可能

でない。

(3)

$$\int_1^e x^3 \log x \, dx = \left[\frac{x^4 \log x}{4} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{4} \, dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

2

(解答例)

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直なベクトル $\vec{c}$ を $\vec{c} = (p, q, r)$ とおくと,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \text{ であり,}$$

$$2p + q = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$-2p + q + 2r = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。また、 $\vec{c}$ の大きさが 3 であるから、

$$p^2 + q^2 + r^2 = 3^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②から $q = -2p, r = 2p$

これらを③に代入して整理すると、

$$p^2 = 1, \quad p = \pm 1$$

 $p = 1$ のとき、 $q = -2, r = 2$ $p = -1$ のとき、 $q = 2, r = -2$ よって、 $\vec{c} = (1, -2, 2), (-1, 2, -2)$ (2) $\vec{c}$ の大きさが 3 であるので、求める単位ベクトル $\vec{u}$ は、

$$\vec{u} = \pm \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \pm \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

(3) $\vec{OK}$ は単位ベクトル $\vec{u} = \pm \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$ に平行なので

$$\vec{OK} = (\alpha, -2\alpha, 2\alpha) \text{ とおくと}$$

$$\vec{OD} = (3, 1, 2), \quad \vec{DK} = (\alpha - 3, -2\alpha - 1, 2\alpha - 2)$$

$$\vec{DK} \cdot \vec{u} = 0 \text{ より } (\alpha - 3, -2\alpha - 1, 2\alpha - 2) \cdot (1, -2, 2) = 0$$

$$\alpha - 3 + 4\alpha + 2 + 4\alpha - 4 = 0, \quad 9\alpha - 5 = 0, \quad \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\vec{OK} = \left(\frac{5}{9}, -\frac{10}{9}, \frac{10}{9} \right)$$

$$|\vec{OK}| = \sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^2 + \left(-\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{25+100+100}{81}} = \sqrt{\frac{225}{81}} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

3

(解答例)

(1) a と d を用いたときの等差数列の和は公式より,

$$S_n = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \} \text{であるから, } S_6 = \frac{1}{2} 6 \{ 2a + 5d \} = 738 \text{ となり,}$$

$$2a + 5d = 246$$

(2) (1)で得られた式において, d に自然数を 1 から代入していく。

(i) $d = 1$ のとき $a = \frac{241}{2}$ となり, 不適となる。

(ii) $d = 2$ のとき $a = 118$ であるから, 118, 120, 122, 124, 126, 128

(3) 整数問題 (不定一次方程式) として解く。

$$2a + 5d = 246 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$2 \cdot 118 + 5 \cdot 2 = 246 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

であるから, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $2(a - 118) + 5(d - 2) = 0$ を得る。

2 と 5 は互いに素であるので, $d - 2 = 2m$, $a - 118 = -5m$ となり,

$$d = 2(m + 1), \quad a = -5m + 118$$

と表せる。

ここで, m は整数であるが, d が自然数であることから $m \geq 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$

となる。

等差数列の一般項は, $a_n = a + (n-1)d$ であり, 1 から 200 までの自然数で出ていることから, $a_1 = -5m + 118 \geq 1$, $a_6 = 5m + 128 \leq 200$ を満たす必要があ

$$\text{る。これらより } m \leq \frac{117}{5} = 23.4 \quad \dots\dots \textcircled{4}, \quad m \leq \frac{72}{5} = 14.4 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ より, $0 \leq m \leq 14$ となり, 条件を満たす数列は 15 となる。

4

(解答例)

(1) $x^2 + y^2 + ax - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$ に $x=1$, $y=\sqrt{3}$ を代入すると,

$$1^2 + (\sqrt{3})^2 + a \times 1 - 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 4 = 0$$

これを解いて, $a=4$

(2) (1) より円 C の方程式は $x^2 + y^2 + 4x - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$ となり,

$$\text{方程式を変形すると } (x+2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 12$$

よって, 円 C の中心の座標は, $(-2, 2\sqrt{3})$, 半径は $2\sqrt{3}$ である。

(3) 円 C の中心の座標 $(-2, 2\sqrt{3})$ と $A(1, \sqrt{3})$ を通る直線の傾きは

$$\frac{\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{1 - (-2)} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

接線 l は, この直線に垂直であるから, 求める接線 l の傾きを m とすると,

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \times m = -1 \text{ となる。よって, } m = \sqrt{3}$$

接線 l は, 点 $A(1, \sqrt{3})$ を通り傾きが $\sqrt{3}$ の直線であるので, その方程式は,

$$y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 1)$$

すなわち, $y = \sqrt{3}x$

5

(解答例)

(1) $y' = \frac{1}{x}$ より, 接点の座標を $(t, \log 2t)$ とおけば, 接線の方程式は,

$$y = \frac{1}{t}(x-t) + \log 2t \quad \text{となる。}$$

これが, 原点を通るので,

$$0 = -1 + \log 2t \quad \text{となり,} \quad \log 2t = 1 \quad \text{から} \quad t = \frac{e}{2} \quad \text{を得る。}$$

$$\text{ゆえに, 求める方程式は,} \quad y = \frac{2}{e}x \quad \text{となる。}$$

(2) 原点をO, 接点をA, そしてAからx軸に下ろした垂線をABとする。曲線Cは

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ を通るから, 求める面積 } S \text{ は, } \triangle OAB \text{ の面積 } S_1 \text{ から } S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \log 2x \, dx$$

を引いたものである。まず, 設問(1)よりAの座標は $\left(\frac{e}{2}, 1\right)$ だから,

$$\triangle OAB \text{ の面積は } S_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot 1 = \frac{e}{4} \quad \text{である。次に,}$$

$$S_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \log 2x \, dx = \left[x \log 2x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} dx = \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{となる。}$$

$$\text{ゆえに, 求める面積 } S = S_1 - S_2 = \frac{e}{4} - \frac{1}{2} \quad \text{となる。}$$

数 学

学 科(コース)	配 点
化学・生命理工学科，物理・材料理工学科， システム創成工学科(機械科学コース，社会基盤・環境コース)	300 点
システム創成工学科(電気電子通信コース，知能・メディア情報コース)	400 点

9 時 30 分 ～ 11 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は，1 から 5 までの計 5 問です。1 から 5 までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は，1 から 5 までの計 5 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答用紙の表紙は，計算用紙として適宜利用してよい。
5. 解答開始の合図があった後に，必ず解答用紙のすべてに，本学の受験番号を記入しなさい。
6. 各解答用紙は，紙面の中央に印刷された縦線によって，左側と右側の二つの部分に分けられています。解答は，まず用紙の左側の部分に書き，それから右側の部分に続けなさい。
7. 印刷不鮮明及びページの落丁・乱丁等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
8. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
9. 試験終了後，問題冊子，解答用紙の表紙は持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) n を自然数, θ を実数とする。

$\sin\{(n+1)\theta\} + \sin\{(n-1)\theta\}$ を $\sin(n\theta)$, $\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x) = x - \sqrt{x^2}$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ。

(3) 定積分 $\int_1^e x^3 \log x \, dx$ を求めよ。

2 座標空間内の3点を $O(0, 0, 0)$, $A(2, 1, 0)$, $B(-2, 1, 2)$ とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直で大きさが3のベクトル $\vec{c}$ をすべて求めよ。

(2) 設問(1)の $\vec{c}$ に平行な単位ベクトル $\vec{u}$ をすべて求めよ。

(3) 設問(2)で求めた単位ベクトル $\vec{u}$ に平行で点 O を通る直線を m とする。

点 $D(3, 1, 2)$ から直線 m に引いた垂線の交点を K としたとき、点 O から点 K までの長さを求めよ。

3

1 から 200 までの自然数からなる項数が 6 の等差数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ は、初項から第 6 項までの和が 738 となる。この等差数列の初項を a 、公差を d とし、次の問いに答えよ。ただし、 a と d はいずれも自然数とする。

- (1) a と d の間に成り立つ等式を求めよ。
- (2) この条件を満たす数列を 1 つ求めよ。また、求めた数列の初項 a と公差 d を記せ。
- (3) この条件を満たす数列はいくつあるか答えよ。なお、答えを導く過程も記すこと。

4 円 $C: x^2 + y^2 + ax - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$ 上の点 $A(1, \sqrt{3})$ における接線を l とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 a は実数とする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。
- (3) 接線 l の方程式を求めよ。

5 曲線 $C: y = \log 2x$ について、次の問いに答えよ。ただし、 $\log$ は自然対数とする。

- (1) 原点を通り、曲線 C に接する直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 設問(1)で求めた接線 l と x 軸および曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

