

平成30年度岩手大学一般入試（前期日程） 数学（農学部）解答例

1

(1) $11101011_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2 + 1 = 128 + 64 + 32 + 8 + 2 + 1 = 235$
 となり, さらに $235 = 5 \times 47 = 5 \times (5 \times 9 + 2) = 5 \times \{5 \times (5 + 4) + 2\} =$
 $5^3 + 4 \times 5^2 + 2 \times 5 = 1420_{(5)}$ となる。

(2) 題意より, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b})$ となる。ゆえに,

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}) - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{8}\vec{b}$$

となる。

(3) 判別式 ≥ 0 となる条件を求めればよい。したがって,

$$a^2 - 4(2a - 3) = a^2 - 8a + 12 = (a - 2)(a - 6) \geq 0$$

これを満たす1以上6以下の整数は1, 2, 6である。よって求める確率は $3/6=1/2$
 となる。

2

(1) $a_n = 5 + d(n-1)$, $b_n = 2r^{n-1}$ であるから, 条件より,

$$5 + d - 2r = 5 \dots \textcircled{1}$$

$$5 + 2d - 2r^2 = -1 \dots \textcircled{2}$$

$$5 + 3d - 2r^3 = -31 \dots \textcircled{3}$$

となる。式 ①より $d = 2r$ となるので, これを式 ②に代入すると, $5 + 4r - 2r^2 = -1$ となる。この式を整理すると $r^2 - 2r - 3 = 0$ なので, 因数分解して $(r+1)(r-3) = 0$ となり, $r = -1, 3$ である。 $r = -1$ のとき, $d = -2$ であり, 式 ③の左辺は $5 - 6 + 2 = 1$ となり, 右辺と一致せず, 適さない。 $r = 3$ のとき, $d = 6$ であり, 式 ③の左辺は $5 + 18 - 54 = -31$ となり, 右辺と一致し, 適する。ゆえに公差 $d = 6$, 公比 $r = 3$ である。

(2) 設問(1)より, $a_n = 5 + 6(n-1)$, $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ である。 $c_n = a_n - b_n$ なので, $c_n = 6n - 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ である。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n (6k - 2 \cdot 3^{k-1} - 1) = 6 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} - n$
 $= 3n(n+1) - 3^n + 1 - n = n(3n+2) - 3^n + 1$ となる。

3

(1) $m = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$ より, $n = 3^2 \cdot 5^2 = 225$ となる。

(2) $m = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 = (2^3)^2 \cdot (3^3)^1 \cdot 3 \cdot 5$ の立方数である約数は,

$$(2^3 \text{ の } 0 \text{ 乗または } 1 \text{ 乗または } 2 \text{ 乗}) \times (3^3 \text{ の } 0 \text{ 乗または } 1 \text{ 乗})$$

という形になる。したがって個数は, $(2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$ 個である。

(3) $2^k m = 2^{k+6} \cdot 3^4 \cdot 5$ より, $k = 9$ のとき $2^9 m = (2^3)^5 \cdot (3^3)^1 \cdot 3 \cdot 5$ の立方数である約数は $(5+1) \cdot (1+1) = 6 \cdot 2 = 12$ 個となる。そして, $k = 10$, $k = 11$ も同じだが, $k = 12$ のとき $2^{12} m = (2^3)^6 \cdot (3^3)^1 \cdot 3 \cdot 5$ の立方数である約数は $(6+1) \cdot (1+1) = 7 \cdot 2 = 14$ 個となる。したがって答は $k = 11$ である。

4

(1) 円 C_2 と接することから, C_2 の中心である原点とその直線との距離は C_2 の半径 r に等しい。よって原点と直線の距離の公式より, $r = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となる。

(2) C_1 の方程式は $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ より, $y' = -x$ である。よって直線 l と放物線 C_1 の接点の x 座標を t とすれば, $x = t$ における接線の方程式は,

$$y = -t(x - t) - \frac{1}{2}t^2 - 1 = -tx + \frac{1}{2}t^2 - 1$$

となる。したがって l の方程式は $2tx + 2y + (2 - t^2) = 0$ と書け, 設問 (1) より

$$\frac{|2 - t^2|}{\sqrt{(2t)^2 + 2^2}} = 1 \Leftrightarrow |2 - t^2| = 2\sqrt{t^2 + 1}$$

を得る。両辺正であるから, 平方しても同値な式が得られ,

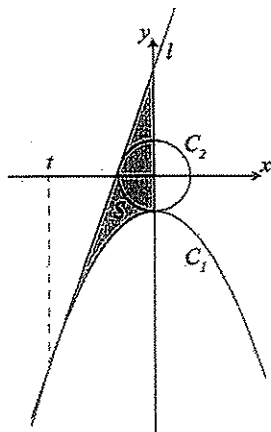
$$(2 - t^2)^2 = 4(t^2 + 1) \Leftrightarrow t^4 - 8t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2(t^2 - 8) = t^2(t - 2\sqrt{2})(t + 2\sqrt{2}) = 0$$

となる。直線 l と放物線 C_1 の接点は $x < 0$ なので, $t < 0$ となるから, $t = -2\sqrt{2}$ を得る。ゆえに直線 l の方程式は, $y = 2\sqrt{2}x + 3$ となる。

(3) l と C_1 および y 軸で囲まれた面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left\{ (2\sqrt{2}x + 3) - \left(-\frac{1}{2}x^2 - 1\right) \right\} dx = \int_{-2\sqrt{2}}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2\sqrt{2}}^0 (x + 2\sqrt{2})^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x + 2\sqrt{2})^3 \right]_{-2\sqrt{2}}^0 = \frac{8}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。



5

(1) $F(-1) = (-1)^4 + (a+1)(-1)^3 + (2a+4)(-1)^2 + (a+5)(-1) + 1 = 1 - (a+1) + (2a+4) - (a+5) + 1 = 0$ となり, 因数定理より $x+1$ は $F(x)$ の因数である。

(2) 整式の除法により $G(x)$ を求めると,

$$\begin{array}{r}
 x^3 \quad + ax^2 \quad + (a+4)x \quad + 1 \\
 x+1 \overline{) x^4 + (a+1)x^3 + (2a+4)x^2 + (a+5)x + 1} \\
 \underline{x^4 \quad + x^3} \\
 ax^3 + (2a+4)x^2 \\
 \underline{ax^3 + ax} \\
 (a+4)x^2 + (a+5)x \\
 \underline{(a+4)x^2 + (a+4)x} \\
 x+1 \\
 \underline{x+1} \\
 0
 \end{array}$$

$$G(x) = x^3 + ax^2 + (a+4)x + 1$$

を得る。

(3) t を $G(x) = 0$ の整数解とすると,

$$t^3 + at^2 + (a+4)t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(t^2 + at + a + 4) = -1$$

より t は -1 の約数である。ゆえに $t = \pm 1$ を得る。 $t = 1$ のとき, $1 + a + a + 4 + 1 = 0$ から $a = -3$ となる。 $t = -1$ のとき, $-1 + a - a - 4 + 1 = -4 \neq 0$ となるので適さない。よって整数 a の値は $a = -3$ である。

数 学

植物生命科学科，応用生物化学科	}	300 点
森林科学科，食料生産環境学科		
動物科学科		
共同獣医学科		200 点

9 時 30 分 ～ 11 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は，1 から 5 までの計 5 問です。1 から 5 までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は 5 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答開始の合図があった後に，必ず解答用紙のすべてに，本学の受験番号を記入しなさい。
5. 印刷不鮮明及びページの落丁・乱丁等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
7. 試験終了後，問題冊子及び解答用紙の表紙は持ち帰りなさい。

1

次の問いに答えよ。

- (1) 2進法で11101011(2)と表される数を5進法で表せ。
- (2) 三角形OABにおいて、辺OAを1:2に内分する点をC、辺OBを1:3に内分する点をD、線分ADの中点をEとする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。このとき、 $\overrightarrow{CE}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (3) 1個のさいころを投げて出た目を a とすると、2次方程式

$$x^2 - ax + 2a - 3 = 0$$

が実数の解をもつ確率を求めよ。

2 初項が5である等差数列 $\{a_n\}$ と、初項が2である等比数列 $\{b_n\}$ がある
($n = 1, 2, 3, \dots$)。数列 $\{c_n\}$ が $c_n = a_n - b_n$, $c_2 = 5$, $c_3 = -1$, $c_4 = -31$ で
定められるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の公差 d と数列 $\{b_n\}$ の公比 r を求めよ。
- (2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

3 ある自然数の3乗になっている数を立方数と呼ぶことにする。例えば,
 $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $216 = 6^3 = 2^3 \cdot 3^3$ などは立方数である。自然数 $m = 25920$ に
ついて、次の問いに答えよ。

- (1) mn が立方数となる最小の自然数 n を求めよ。
- (2) m の正の約数で、かつ立方数でもあるものの個数を求めよ。
- (3) $2^k m$ の正の約数で、かつ立方数でもあるものが12個となるような自然数 k
のうち、最大のものを求めよ。

4 $x < 0$ の範囲において、直線 l が

放物線 $C_1: y = -\frac{1}{2}x^2 - r$ と円 $C_2: x^2 + y^2 = r^2$

の両方に接している。ただし、 $r > 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 円 C_2 に接する直線の方程式を $ax + by + c = 0$ とするとき、 r を a, b, c を用いて表せ。ただし、 a, b, c は定数とする。

(2) $r = 1$ のとき、直線 l の方程式を求めよ。

(3) $r = 1$ のとき、直線 l と放物線 C_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

5 a を整数とする。整式

$$F(x) = x^4 + (a+1)x^3 + (2a+4)x^2 + (a+5)x + 1$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 整式 $F(x)$ が 1 次式 $x+1$ を因数にもつことを示せ。
- (2) $F(x) = (x+1)G(x)$ を満たす $G(x)$ を求めよ。
- (3) $G(x) = 0$ の解の 1 つが整数であるとき、 a の値を求めよ。

