

(1)

$$\sin 2x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \cos x = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \text{ または } \cos x = 0$$

となるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ より、求める値は $x = \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

(2)

線分 BC の長さは点 B と直線 l の距離と等しいから、

$$\begin{aligned} BC &= \frac{|5\sqrt{3} \cdot 35 - 7 \cdot 25\sqrt{3} - 12|}{\sqrt{(5\sqrt{3})^2 + (-7)^2}} \\ &= \frac{|-12|}{\sqrt{124}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{31}} \end{aligned}$$

となる。また、線分 BD の長さは点 B と直線 m の距離と等しいから、

$$\begin{aligned} BD &= \frac{|7 \cdot 35 + 5\sqrt{3} \cdot 25\sqrt{3} + 53|}{\sqrt{7^2 + (5\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{|673|}{\sqrt{124}} \\ &= \frac{673}{2\sqrt{31}} \end{aligned}$$

である。したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned} BC \cdot BD &= \frac{6}{\sqrt{31}} \cdot \frac{673}{2\sqrt{31}} \\ &= \frac{2019}{31} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2019}{31}$$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(3k-2) \\ &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

である。したがって S_n が 32 の倍数のとき、 $n(n+1)(2n-1)$ は 64 の倍数になる。ここで $(2n-1)$ は常に奇数となり、また n と $(n+1)$ のうち一方も奇数となるから、 S_n が 32 の倍数となるための必要十分条件は、 n と $(n+1)$ のどちらかが 64 の倍数となることである。これを満たす自然数 n のうち最小となるのは、

$$\begin{aligned} n+1 &= 64 \\ \Leftrightarrow n &= 63 \end{aligned}$$

のときである。

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\vec{a} \\ \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \frac{2}{1+2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{1+2}\overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}\{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= \frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c}$$

(2)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{BR}|^2 &= |\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OR}|^2 - 2\overrightarrow{OR} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2\end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OR}| &= |\overrightarrow{BR}| \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OR}|^2 &= |\overrightarrow{BR}|^2 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OR}|^2 &= |\overrightarrow{OR}|^2 - 2\overrightarrow{OR} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \therefore 2\overrightarrow{OR} \cdot \vec{b} &= |\vec{b}|^2\end{aligned}$$

となる。これに(1)の結果を代入することで,

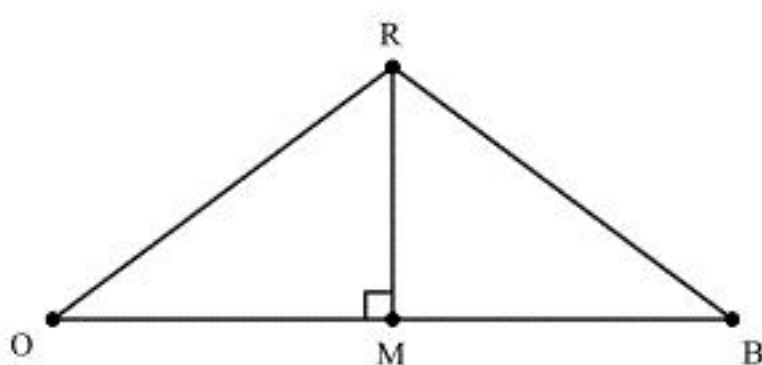
$$\begin{aligned}2\left(\frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}(1-t)\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c}\right) \cdot \vec{b} &= |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}t\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{2}{3}(1-t)|\vec{b}|^2 + \frac{2}{3}t\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}t + \frac{2}{3}(1-t) + \frac{2}{3}t &= 1 \\ \therefore t &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}$$

(3)

線分 OB の中点を M とおく。三角形 OBR を図示すると下図のようになる。



ここで(2)より $t = \frac{1}{4}$ であるので, (1)の結果に代入することで,

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{12}\vec{c}$$

となる。また,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OR} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} - \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{12}\vec{c}\right) \\ &= \frac{1}{12}(-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})\end{aligned}$$

となる。以上より,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{RM}|^2 &= \left|\frac{1}{12}(-2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c})\right|^2 \\ &= \frac{1}{144}\left(4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} - 6\vec{b} \cdot \vec{c} + 4\vec{c} \cdot \vec{a}\right) \\ &= \frac{5}{36} \\ \therefore |\overrightarrow{RM}| &= \frac{\sqrt{5}}{6}\end{aligned}$$

が得られる。求める面積は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\overrightarrow{RM}| \cdot |\vec{b}| &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} \cdot 1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{12}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{5}}{12}$$

(1)

サイコロ A, B の出る目の組み合わせの全事象は $6 \cdot 8 = 48$ 通りある。また、2 つの出た目が等しいときその目は 1 から 6 のいずれかで 6 通りあるから、求める確率は、

$$\frac{6}{48} = \frac{1}{8}$$

である。

(答) $\frac{1}{8}$

(2)

「2 つの出た目の積が 3 の倍数とならない確率」を考える。サイコロ B の出た目が 3 の倍数となるのは 3, 6 のどちらかが出たときだから、サイコロ B の出た目が 3 の倍数とならない確率は、

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

である。また、サイコロ C の出た目が 3 の倍数となるのは 3, 6, 9, 12, 15, 18 のいずれかが出たときだから、サイコロ C の出た目が 3 の倍数とならない確率は、

$$\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

である。したがって、2 つの出た目の積が 3 の倍数とならない確率は、

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{40}$$

となる。以上より、求める確率は、

$$1 - \frac{21}{40} = \frac{19}{40}$$

である。

(答) $\frac{19}{40}$

(3)

サイコロ A, B, C の出た目が 3 以上である確率はそれぞれ、

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{20}$$

である。

(答) $\frac{9}{20}$

(4)

(3)と同様に、3 つの出た目がすべて 4 以上である確率を求める。サイコロ A, B, C の出た目が 4 以上である確率はそれぞれ、

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{17}{20}$$

であるから、3 つの出た目がすべて 4 以上である確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{17}{20} = \frac{17}{64}$$

である。ここで、3 つの出た目の最小値が 3 となるのは、「3 つの出た目がすべて 3 以上である」かつ「すくなくとも 1 つは 3 である」であるときである。

$$\frac{9}{20} - \frac{17}{64} = \frac{59}{320}$$

となる。

(答) $\frac{59}{320}$

(1)

$f(x) = -4x^3 + 3x + 1$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -12x^2 + 3 \\ &= -12\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \\ f(2) &= -25 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-25

したがって、区間 $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値は 2、最小値は -25 である。

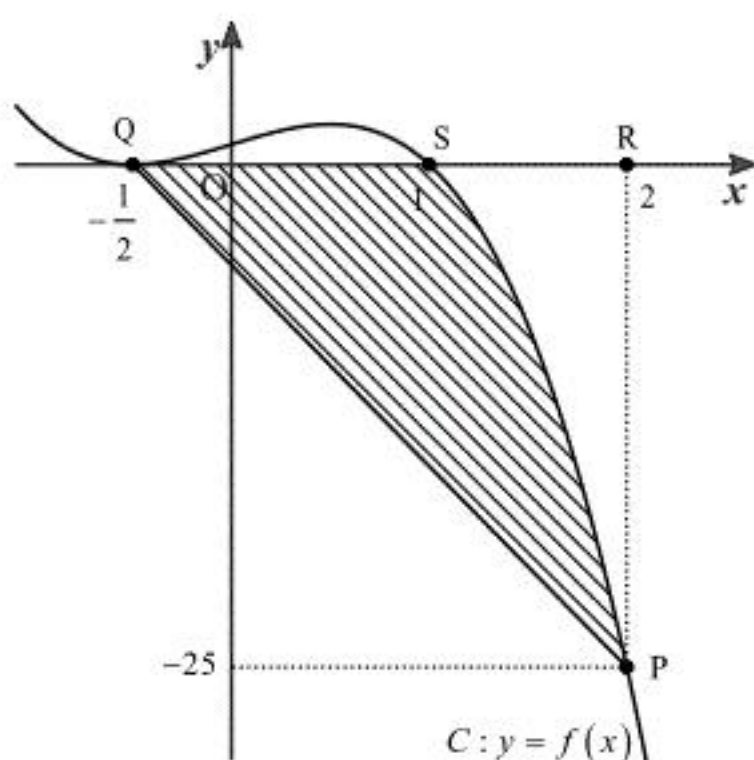
(答) 最大値：2 最小値：-25

(2)

(1)より点 P の座標は $(2, -25)$ であり、点 Q の座標は $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ である。また、点 P から x 軸におろした垂線の足を点 R とすると、その座標は $(2, 0)$ である。さらに、

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x^2 + 3x + 1 \\ &= -4\left(x - 1\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

であるから、曲線 C と x 軸は点 $(1, 0)$ で交わり、この点を S とおく。以上より、領域を図示すると下図のようになる。



ここで、曲線 C の $1 \leq x \leq 2$ の部分と x 軸、および線分 PR で囲われた領域の面積を S_1 とおくと、求める面積は、三角形 PQR の面積から S_1 を引いたものである。三角形 PQR の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}QR \cdot PR &= \frac{1}{2}\left\{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \cdot \{0 - (-25)\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 25 \\ &= \frac{125}{4} \end{aligned}$$

であり、 S_1 は、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^2 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_1^2 (4x^2 - 3x - 1) dx \\ &= \left[x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x \right]_1^2 \\ &= \frac{19}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって求める面積は、

$$\frac{125}{4} - \frac{19}{2} = \frac{87}{4}$$

である。

(答) $\frac{87}{4}$

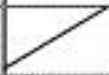
(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(x - \frac{1}{3}\right)\sqrt{x} \\
 &= x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

を微分すると、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{9}\right)
 \end{aligned}$$

となるので $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{9}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって、

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{9}\right) &= \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{9}} \\
 &= -\frac{2}{27}
 \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{9}$ で最小値 $-\frac{2}{27}$ をとる。

(答) $-\frac{2}{27}$

(2)

$$\begin{aligned}
 1 + \{f'(x)\}^2 &= 1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \\
 &= \frac{9}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{36x} \\
 &= \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2
 \end{aligned}$$

であり、 $1 \leq x \leq 16$ において $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}} > 0$ より、

$$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}$$

となる。以上より、求める曲線の長さは、

$$\begin{aligned}
 \int_1^{16} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_1^{16} \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx \\
 &= \left[x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\right]_1^{16} \\
 &= 64
 \end{aligned}$$

である。

(答) 64