

[解答]



[解説]

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 25x - 132$ とおく。

$$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$$

であるから、整式 $f(x)$ が整式 $x^2 + x - 12$ で割り切れるとき、 $f(x)$ は $x-3$ と $x+4$ をともに因数にもつ。よって

$$\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(-4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 81 + 27a + 9b - 75 - 132 = 0 \\ 256 - 64a + 16b + 100 - 132 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b - 14 = 0 \\ -4a + b + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (4, 2)$$

であり、このとき

$$a + b = 6$$

となる。

[解答]

㉞

[解説]

$$\begin{aligned}
 \log_2 a + \log_2 b &= 1 \\
 \Leftrightarrow \log_2 ab &= 1 \\
 \Leftrightarrow ab &= 2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
 \log_c a + \log_c b &= 3 \\
 \Leftrightarrow \log_c ab &= 3 \\
 \Leftrightarrow ab &= c^3
 \end{aligned}$$

がともに成立するとき

$$\begin{aligned}
 2 &= c^3 \\
 \Leftrightarrow c &= \sqrt[3]{2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

である。よって

$$c > 1$$

となり、 $2\log_c(a+b)$ が最小値をとるのは $a+b$ が最小値をとるときである。ここで、 a, b はともに正の実数であるから、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。ただし、等号は $a=b$ のとき成り立つ。以上より

$$\begin{aligned}
 2\log_c(a+b) &= \frac{2\log_2(a+b)}{\log_2 c} \\
 &\geq \frac{2\log_2 2\sqrt{ab}}{\log_2 \sqrt[3]{2}} \quad (\because \textcircled{2}, \textcircled{3}) \\
 &= \frac{2\log_2 2\sqrt{2}}{\log_2 \sqrt[3]{2}} \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{1}{3}} \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

となり、求める $2\log_c(a+b)$ の最小値は9である。

[解答]

㊦

[解説]

$t = 3^x + 3^{-x}$ とおくと, $3^x > 0, 3^{-x} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{-x} &\geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} \\ &= 2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ただし, 等号が成立するのは

$$\begin{aligned} 3^x &= 3^{-x} \\ \Leftrightarrow x &= 0 \end{aligned}$$

のときであるが, x が正の実数であるとき①の等号は成立せず, $t > 2$ となる。このもとで $f(x)$ を t で表すと

$$\begin{aligned} f(x) &= 9^x + 9^{-x} - \frac{20}{9}(3^{1-x} + 3^{1+x}) \\ &= \left\{ (3^x + 3^{-x})^2 - 2 \right\} - \frac{20}{9} \cdot 3(3^x + 3^{-x}) \\ &= (t^2 - 2) - \frac{20}{3}t \\ &= \left(t - \frac{10}{3} \right)^2 - \frac{118}{9} \end{aligned}$$

となり, $\frac{10}{3} > 2$ であるから, $f(x)$ が最小値をとるのは

$$\begin{aligned} t &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} &= \frac{10}{3} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3^x - 3)(3 \cdot 3^x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3^x &= 3 \quad (\because x > 0 \Leftrightarrow 3^x > 1) \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

のときである。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

 $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) &= \frac{y^2 + x^2}{2xy} \\&= \frac{(2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2}{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\&= \frac{(7 - 4\sqrt{3}) + (7 + 4\sqrt{3})}{2 \cdot (4 - 3)} \\&= 7\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

⊕

〔解説〕

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2b + 3a = ab$$

$$\Leftrightarrow ab - 3a - 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(b-3) = 6$$

となる。 a, b が整数であるとき、 $a-2, b-3$ はともに整数であるから、 $(a-2, b-3)$ は6の約数の組となる。よって、上の式を満たす (a, b) の組は

$$(a-2, b-3) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1), (-1, -6), (-2, -3), (-3, -2), (-6, -1)$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = (3, 9), (4, 6), (5, 5), (8, 4), (1, -3), (0, 0), (-1, 1), (-4, 2)$$

となるが、 $ab \neq 0$ であることから $(a, b) = (0, 0)$ は不適であることに注意すると、求める (a, b) の組の数は全部で7組となる。

[解答]

⑦

[解説]

$f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - ax + a + \frac{a^3}{2}$ とおくと

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2x - a$$

であるから、C1: $y = f(x)$ 上の点 $A(p, f(p))$ における接線 L の方程式は

$$y = f'(p)(x - p) + f(p)$$

$$\Leftrightarrow y = 2px - p^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、また C2: $y = g(x)$ 上の点 $B(q, g(q))$ における接線 L の方程式は

$$y = g'(q)(x - q) + g(q)$$

$$\Leftrightarrow y = (2q - a)x - q^2 + a + \frac{a^3}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②が一致することから

$$\begin{cases} 2p = 2q - a \\ -p^2 = -q^2 + a + \frac{a^3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p - q = -\frac{a}{2} \\ (p + q)(p - q) = -a - \frac{a^3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p - q = -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2}(p + q) = -a - \frac{a^3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p - q = -\frac{a}{2} \\ p + q = 2 + a^2 \quad (\because a > 0) \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$p + q - a^2 = 2$$

である。

〔解答〕

④

〔解説〕

$\angle BAD = \theta$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) とおくと、四角形 ABCD が円に内接することから対角の大きさの和は 180° であり、 $\angle BCD = 180^\circ - \theta$ となる。ここで、 $\triangle ABD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + DA^2 - 2AB \cdot DA \cos \theta \\ &= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cos \theta \\ &= 29 - 20 \cos \theta \end{aligned}$$

となり、 $\triangle CBD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-\cos \theta) \\ &= 25 + 24 \cos \theta \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} 29 - 20 \cos \theta &= 25 + 24 \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{1}{11} \end{aligned}$$

であり、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $\sin \theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{11}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{30}}{11} \end{aligned}$$

となる。よって、四角形 ABCD の面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{\sqrt{30}} &= \frac{1}{\sqrt{30}} \left\{ \frac{1}{2} AB \cdot DA \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin(180^\circ - \theta) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \left\{ \frac{1}{2} AB \cdot DA \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin \theta \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{30}} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{30}}{11} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{30}}{11} \right\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

⑨

〔解説〕

xy 平面に関して点 $B(3, 2, 2)$ と対称な点を B' とおくと $B'(3, 2, -2)$ となり、点 P は xy 平面上を動く点であるから

$$BP = B'P$$

である。したがって

$$AP + BP = AP + B'P$$

となり、点 $A(1, -2, 3)$ 、 $B'(3, 2, -2)$ はそれぞれ $z > 0$ 、 $z < 0$ の領域に存在するから、 $AP + B'P$ が最小となるのは点 P が線分 AB' と xy 平面の交点となるときである。よって、 $AP + BP$ の最小値 m は線分 AB' の長さに等しく

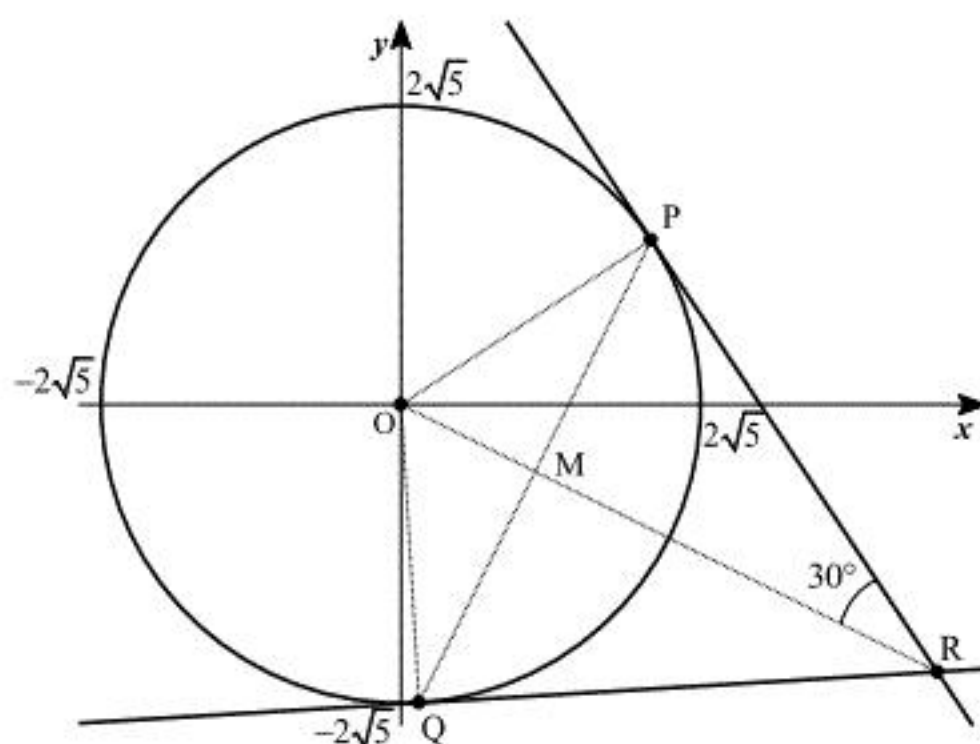
$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{(3-1)^2 + \{2-(-2)\}^2 + \{(-2)-3\}^2}}{\sqrt{5}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

⑦

〔解説〕



上図のように P, Q を定めても一般性は失われない。このもとで、図形の直線 OR に関する対称性より $\angle PRQ = 60^\circ$ のとき $\angle PRO = 30^\circ$ であり、円の中心と接線の関係より $\angle OPR = 90^\circ$ となるから

$$\begin{aligned}
 OR &= 2OP \\
 \Leftrightarrow \sqrt{8^2 + a^2} &= 2 \cdot 2\sqrt{5} \\
 \Leftrightarrow 64 + a^2 &= 80 \\
 \Leftrightarrow a^2 &= 16 \\
 \Leftrightarrow a &= -4 \quad (\because a < 0) \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。直線 PQ と OR の交点を M とすると、図形の対称性より M は線分 PQ の中点となる

から x 座標は $\frac{p+q}{2}$ である。ここで、 $\angle POM = 60^\circ$ および $PQ \perp OR$ より

$$OP = 2OM$$

となるから

$$OM : OR = 1 : 4$$

となり、 $R(8, -4)$ であることより M の座標は $(2, -1)$ である。以上より

$$\begin{aligned}
 \frac{p+q}{2} &= 2 \\
 \Leftrightarrow p+q &= 4 \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

となり、①、②より

$$|a+p+q| = 0$$

である。

〔解答〕

⑨

〔解説〕

点 P の座標は $0 \leq \theta < 2\pi$ である実数 θ を用いて $(3\cos\theta, 2\sin\theta)$ と表すことができる。このとき、線分 PQ の長さを $d(\theta)$ とおくと、これは点 P と直線 $L: x-2y+10=0$ の距離に一致するから

$$\begin{aligned} d(\theta) &= \frac{|3\cos\theta - 2 \cdot 2\sin\theta + 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|3\cos\theta - 4\sin\theta + 10|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|5\cos(\theta + \alpha) + 10|}{\sqrt{5}} \quad (\text{ただし, } \cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5} \text{ とする}) \\ &= \sqrt{5}\cos(\theta + \alpha) + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $d(\theta)$ の最大値 M と最小値 m は

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \\ &= 3\sqrt{5} \\ m &= -\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となるから

$$\frac{M}{m} = 3$$

である。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

初項 a 、公差 d である等差数列の第 n 項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表されるから、この数列の第10項が29、第15項が19であるとき

$$\begin{cases} a_{10} = 29 \\ a_{15} = 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 9d = 29 \\ a + 14d = 19 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a, d) = (47, -2)$$

であり、このとき

$$\begin{aligned} a_n &= 47 + (n-1) \cdot (-2) \\ &= -2n + 49 \end{aligned}$$

となる。この数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (-2k + 49) \\ &= -n(n+1) + 49n \\ &= -n^2 + 48n \\ &= -(n-24)^2 + 576 \end{aligned}$$

であるから、 S_n は $n=24$ のとき最大値576をとる。よって

$$M = 576$$

であり

$$\frac{M}{72} = 8$$

となる。

〔解答〕



〔解説〕

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}(a_n - 6)$$

より、数列 $\{a_n - 6\}$ は初項 $a_1 - 6 = -5$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列となり

$$a_n - 6 = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow a_n = -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 6$$

である。このとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ -5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 6 \right\} \\ &= (-5) \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + 6n \\ &= -\frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + 6n \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{15}{2n} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + 6 \right\} \\ &= 6 \end{aligned}$$

である。

[解答]

㉞

[解説]

 $x-6, x, y$ がこの順で等比数列であることから

$$(x-6)y = x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、 $x-9, x, y-x$ がこの順で等差数列であることから

$$\begin{aligned} (x-9) + (y-x) &= 2x \\ \Leftrightarrow y &= 2x+9 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。よって、①、②より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x-6)y = x^2 \\ y = 2x+9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(2x+9) = x^2 \\ y = 2x+9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 54 = 0 \\ y = 2x+9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-9) = 0 \\ y = 2x+9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (9, 27) \quad (\because x > 6, y > 0) \end{aligned}$$

となるから

$$\frac{3y}{x} = 9$$

である。

[解答]

⑦

[解説]

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくと, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ はそれぞれ

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{5}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}$$

と表されるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{15}$$

であり, また $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であることより

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= \frac{15}{2}\end{aligned}$$

となる。さらに, 同様にして

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{15}{2}, \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{15}{2}$$

であるから, $|\overrightarrow{MN}| = m$ としたとき

$$\begin{aligned}m^2 &= \left| -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b} + \frac{3}{8}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16}|\vec{a}|^2 + \frac{25}{64}|\vec{b}|^2 + \frac{9}{64}|\vec{c}|^2 - \frac{5}{16}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{15}{32}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{3}{16}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{555}{64}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{64m^2}{185} = 3$$

である。

〔解答〕

④

〔解説〕

$|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=2, |\vec{a}-\vec{b}|=3\sqrt{5}$ であるとき

$$\begin{aligned} |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= -8 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} |\vec{a}+t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 25 - 16t + 4t^2 \\ &= 4(t-2)^2 + 9 \end{aligned}$$

となり、 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は

$t=2$ のとき最小値 9

をとる。 $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ が最小となるとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となるから、 $|\vec{a}+t\vec{b}|$ は

$t=2$ のとき最小値 3

をとり、 $c=2, m=3$ となる。以上より

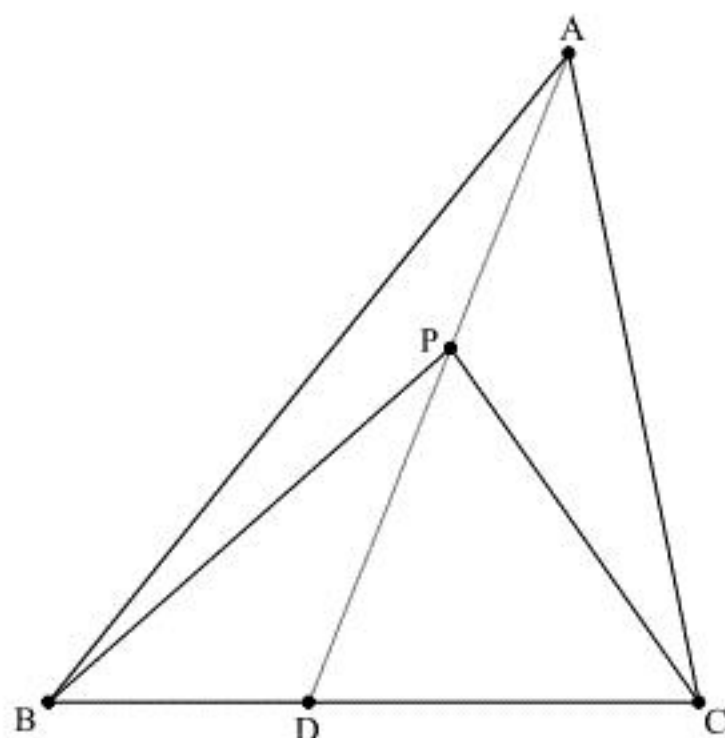
$$\frac{mc}{3} = 2$$

である。

〔解答〕



〔解説〕



点Pは

$$\begin{aligned}
 6\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AP} + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 11\overrightarrow{AP} &= 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{5}{11} \cdot \frac{3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{5}
 \end{aligned}$$

を満たすことから、辺BCを2:3に内分する点をDとすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{11} \overrightarrow{AD}$$

となり、点Pは線分ADを5:6に内分する点となる。よって、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle PBC$ の面積をそれぞれ S_1 、 S_2 としたとき、これらの底辺をBCとみると、面積の比は

$$\begin{aligned}
 \frac{S_2}{S_1} &= \frac{PD}{AD} \\
 &= \frac{6}{11}
 \end{aligned}$$

となるから

$$\frac{11S_2}{S_1} = 6$$

である。

〔解答〕



〔解説〕

すべての玉の取り出し方は同様に確からしいとする。玉の取り出し方は全部で ${}_9C_3$ 通りである。終了したときに取り出した玉の数が6個以下であるのは、初めに取り出した6個の玉のうち3個が赤い玉である場合であるから、このようになる場合の数は ${}_6C_3$ 通りである。同様に、終了したときに取り出した玉の数が5個以下である場合の数は ${}_5C_3$ 通りである。よって、終了したときに取り出した玉の数が6個であるような場合の数は、上記2つの場合の数の差であり、 ${}_6C_3 - {}_5C_3$ 通りである。よって、玉を6個取り出したときに終了する確率 p は

$$\begin{aligned} p &= \frac{{}_6C_3 - {}_5C_3}{{}_9C_3} \\ &= \frac{20 - 10}{84} \\ &= \frac{5}{42} \end{aligned}$$

であり

$$42p = 5$$

となる。

〔解答〕

㉞

〔解説〕

x, y, z, n が 0 以上の整数であるとき、 $x+y+z=n$ を満たす (x, y, z) の組は、互いに区別できない n 個の玉と互いに区別できない 2 個の仕切りを横一列に並べたときの仕切りで区切られた 3 つの領域に含まれる玉の個数の組と一致する。よって、この組の数 $f(n)$ は

$$\begin{aligned} f(n) &= {}_{n+2}C_2 \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

となるから、 $f(n) > 185$ となるとき

$$\begin{aligned} f(n) &> 185 \\ \Leftrightarrow (n+2)(n+1) &> 370 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

であり

$$19 \cdot 18 < 370 < 20 \cdot 19$$

となるから、 $\textcircled{1}$ を満たす最小の整数 n を a とするとき

$$a = 18$$

であり

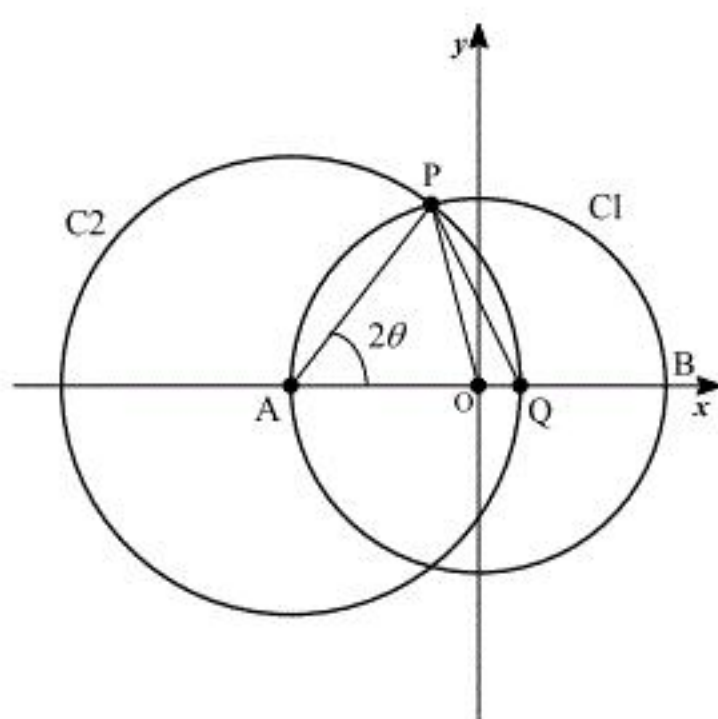
$$\frac{a}{2} = 9$$

となる。

〔解答〕

⊕

〔解説〕



$\triangle OAP$ は $OA = OP$ の二等辺三角形であるから、 $\angle PAB = 2\theta$ とおくと $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$, つまり,

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のもとで

$$\begin{aligned} AP &= 2 \cdot OA \cos 2\theta \\ &= 2a \cos 2\theta \end{aligned}$$

となり、 $\triangle APQ$ は $AP = AQ$ の二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned} PQ &= 2 \cdot AP \sin \theta \\ &= 4a \sin \theta \cos 2\theta \\ &= 4a \sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $t = \sin \theta$ とおくと、 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、 $PQ = f(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= 4at(1 - 2t^2) \\ &= 4a(-2t^3 + t) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4a(-6t^2 + 1) \\ &= -24a\left(t - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(t + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

より、 $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$ における関数 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗		↘	

以上より、 PQ の最大値を M とするとき

$$\begin{aligned} M &= f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ &= \frac{8a}{3\sqrt{6}} \end{aligned}$$

となり

$$\frac{3\sqrt{6}M}{2a} = 4$$

である。

〔解答〕



〔解説〕

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{(n+2)(n+3)} - \sqrt{(n-2)(n-3)} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+3) - (n-2)(n-3)}{\sqrt{(n+2)(n+3)} + \sqrt{(n-2)(n-3)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{\sqrt{(n+2)(n+3)} + \sqrt{(n-2)(n-3)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} + \sqrt{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}} \\
 &= \frac{10}{1+1} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

となるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{(n+2)(n+3)} - \sqrt{(n-2)(n-3)} \right\} = a$ とするとき

$$a = 5$$

である。

〔解答〕

⑦

〔解説〕

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_0^{\pi} (x - t \cos x)^2 dx \\
 &= \int_0^{\pi} x^2 dx - 2t \int_0^{\pi} x \cos x dx + t^2 \int_0^{\pi} \cos^2 x dx
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -2 \int_0^{\pi} x \cos x dx + 2t \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \\
 &= -2 \int_0^{\pi} x (\sin x)' dx + 2t \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= -2 \left([x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right) + 2t \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\
 &= -2 \left(\frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi} \right) + 2t \cdot \frac{\pi}{4} \\
 &= -2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{2} t \\
 &= \frac{\pi}{2} t - (\pi - 2)
 \end{aligned}$$

となる。よって、関数 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	...	$\frac{2(\pi-2)}{\pi}$	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

以上より、関数 $f(t)$ が最小値をとる t の値 a は

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{2(\pi-2)}{\pi} \\
 &= 2 - \frac{4}{\pi}
 \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
 3 &< \pi < 4 \\
 \Leftrightarrow 1 &< \frac{4}{\pi} < \frac{4}{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3} &< 2 - \frac{4}{\pi} < 1
 \end{aligned}$$

より、 a を超えない最大の整数の値は 0 である。



〔解説〕

$f(x) = \frac{2ax}{x^2 - ax + 1}$ について、 $|a| < 2$ のとき

$$x^2 - ax + 1 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 1 - \frac{a^2}{4} > 0$$

であるから、任意の実数 x について $f(x)$ は存在する。また

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2a(x^2 - ax + 1) - 2ax(2x - a)}{(x^2 - ax + 1)^2} \\ &= \frac{2a(-x^2 + 1)}{(x^2 - ax + 1)^2} \\ &= -\frac{2a(x-1)(x+1)}{(x^2 - ax + 1)^2} \end{aligned}$$

であり

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

である。

[1] $-2 < a < 0$ のとき

関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$-\frac{2a}{a+2}$	$\searrow$	$\frac{2a}{2-a}$	$\nearrow$	(0)

よって、 $f(x)$ の最大値は $-\frac{2a}{a+2}$ であるから、これが 2 となるとき

$$-\frac{2a}{a+2} = 2$$

$$\Leftrightarrow -a = 2 + a$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

となり、これは $-2 < a < 0$ を満たす。

[2] $a = 0$ のとき

任意の x について

$$f(x) = 0$$

となることから、関数 $f(x)$ の最大値は 0 であり、 2 となり得ないから不適である。

[3] $0 < a < 2$ のとき

関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-\frac{2a}{a+2}$	$\nearrow$	$\frac{2a}{2-a}$	$\searrow$	(0)

よって、 $f(x)$ の最大値は $\frac{2a}{2-a}$ であるから、これが 2 となるとき

$$\frac{2a}{2-a} = 2$$

$$\Leftrightarrow a = 2 - a$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

となり、これは $0 < a < 2$ を満たす。

以上、[1], [2], [3]より、関数 $f(x)$ の最大値が 2 となるとき、 a のとる値は $1, -1$ であるから、これら 2 つの値を p, q とすると

$$|p - q| = 2$$

となる。

[解答]



[解説]

$$\begin{aligned}\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= \frac{1}{2}\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\} \\ &= \frac{1}{2}(3^2 - 9) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。3次方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ が3つの実数解 α, β, γ をもつとき、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -b \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = c \\ \alpha\beta\gamma = -d \end{cases}$$

となるから

$$(b, c, d) = (-3, 0, -k)$$

である。 $f(x) = x^3 - 3x^2 - k$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x - 2)\end{aligned}$$

である。ここで、3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標にあたるから、3次方程式 $f(x) = 0$ がすべて異なる3つの実数解 α, β, γ をもつとき、関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸が相異なる3つの交点をもつ。さらにこのとき、関数 $y = f(x)$ の極大値と極小値の符号が異なるから

$$\begin{aligned}f(0) \cdot f(2) &< 0 \\ \Leftrightarrow (-k) \cdot (-4 - k) &< 0 \\ \Leftrightarrow k(k + 4) &< 0 \\ \Leftrightarrow -4 < k &< 0\end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

$$\frac{35}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx = \frac{35}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^3 \sin x dx$$

となる。ここで、 $t = \cos x$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

x	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	1	$\rightarrow$	0

であるから

$$\begin{aligned} \frac{35}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^3 \sin x dx &= -\frac{35}{2} \int_1^0 (1 - t^2)^3 dt \\ &= \frac{35}{2} \int_0^1 (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) dt \\ &= \frac{35}{2} \left[t - t^3 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 \right]_0^1 \\ &= \frac{35}{2} \cdot \frac{16}{35} \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕



〔解説〕

$$f(x) = 3x^2 \int_{-1}^1 f(t) dt + x \int_0^1 \{f'(t)\}^2 dt + \int_0^1 f(t) dt$$

について、 $\int_{-1}^1 f(t) dt$, $\int_0^1 \{f'(t)\}^2 dt$, $\int_0^1 f(t) dt$ はいずれも定数であるから

$$a = \int_{-1}^1 f(t) dt \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b = \int_0^1 \{f'(t)\}^2 dt \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c = \int_0^1 f(t) dt (\neq 0) \quad \dots \textcircled{3}$$

とおくと

$$f(x) = 3ax^2 + bx + c$$

となり

$$f'(x) = 6ax + b$$

である。よって

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (3at^2 + bt + c) dt &= 2 \int_0^1 (3at^2 + c) dt \\ &= 2 \left[at^3 + ct \right]_0^1 \\ &= 2a + 2c \end{aligned}$$

であることと①より

$$\begin{aligned} a &= 2a + 2c \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{1}{2}a \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} \int_0^1 (6at + b)^2 dt &= \int_0^1 (36a^2 t^2 + 12abt + b^2) dt \\ &= \left[12a^2 t^3 + 6abt^2 + b^2 t \right]_0^1 \\ &= 12a^2 + 6ab + b^2 \end{aligned}$$

であることと②より

$$b = 12a^2 + 6ab + b^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

となり

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3at^2 + bt + c) dt &= \left[at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + ct \right]_0^1 \\ &= a + \frac{1}{2}b + c \end{aligned}$$

であることと③より

$$\begin{aligned} c &= a + \frac{1}{2}b + c \\ \Leftrightarrow b &= -2a \quad \dots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。⑤、⑥より

$$\begin{aligned} -2a &= 12a^2 + 6a(-2a) + (-2a)^2 \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 2a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(2a + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから、④、⑤、⑥を同時に満たしうる a, b, c の値の組は

$$(a, b, c) = (0, 0, 0), \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$$

となるが、 $c \neq 0$ であることより

$$(a, b, c) = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$$

である。よって

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$$

となり

$$f(0) - \frac{1}{4} = 0$$

である。