

入 学 試 験 問 題 (1次)

数 学

平成 29 年 1 月 23 日

9 時 00 分—10 時 20 分

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いて見てはならない。
- 2 この冊子は、9 ページである。落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出よ。
- 3 解答には必ず黒鉛筆(またはシャープペンシル)を使用せよ。
- 4 解答用紙の指定欄に受験番号上下 2 か所、氏名を忘れずに記入せよ。
- 5 解答は、必ず解答用紙の所定の解答欄に記入せよ。
- 6 解答の記入の仕方については、次ページ冒頭および解答用紙に書いてある注意に従え。
- 7 この冊子の余白は、草稿用に使用してよい。ただし、切り離してはならない。
- 8 解答用紙およびこの問題冊子は、持ち帰ってはならない。

受験番号				
------	--	--	--	--

上の枠内に受験番号を記入せよ。

設問ごとに、与えられた選択肢の中から最も適当なものを一つだけ選び、解答用紙の該当する記号を塗りつぶせ。

- 1 2つの整式 $A = x^3 - 2a^2x + 4a^3$, $B = x + 2a$ を x についての整式とみて、 A を B で割った余りを求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 2 $x = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ であるとき、 $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 3 方程式 $\log_3(9x) - 6 \log_x 9 = 3$ のすべての実数解の積の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

4 方程式 $(\log_2 x)^2 \cdot \log_2(8x^2) = a$ は、すべて異なる3つの実数解 $\frac{\beta}{\gamma}$, β , $\beta\gamma$ ($\gamma \neq 0$) をもつものとする。 $2a$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

5 方程式 $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta = k$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) が、異なる2つの実数解をもつための k のとりうる範囲は、 $a \leq k < b$ となる。 $16(b - a)$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

6 複素数 $Z = \frac{(1+i)^3(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}-3i)^2}$ について考える。
 Z^{2n} が実数となるとき、自然数 n の最小値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

7 $A = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4} + \frac{1}{1-a^5} + \frac{1}{1-a^6}$ とする。

$\alpha = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ であるとき、 A の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

8 2つの方程式 $A: x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ と $B: x^2 - bx + 3 = 0$ (a, b, c は実数) について考える。方程式 A は、 $1 + i$ を1つの解にもつとする。

方程式 A と B がただ1つの解を共有するとき、 $\frac{|abc|}{4}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

9 方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 8 = 0$ (a, b は実数とする) は、 $x = 1, x = 2$ を解としてもつ。 $\left| \frac{b}{a} \right|$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

10 点A(3, 2)と円C: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 上の点Qについて考える。

線分AQの中点をPとする。点Pの軌跡によって囲まれる領域の面積をSとする。 $\frac{7S}{\pi}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

11 3つの直線 $x - y + 2 = 0$, $x + y - 12 = 0$, $7x - y - 4 = 0$ で囲まれた三角形に内接する円の面積をSとする。 $\frac{4S}{\pi}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

12 原点O(0, 0, 0), 点A(-3, 2, 1), 点B(2, -1, -1), 点C(1, 1, 0)によって作られる四面体OABCの体積をVとしたとき, $9V$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

13 大きさがともに1である2つのベクトル \vec{a} および \vec{b} は、 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 2$ を満たす。 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = k$ としたとき、 k^2 の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

14 原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径1の球面上に存在するすべて異なる3つの点 A, B, C について、 $3\vec{OA} + 4\vec{OB} - 5\vec{OC} = \vec{0}$ が成立する。 $\triangle ABC$ の面積を S としたとき、 $10S$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

15 自然数360は2つの自然数 a と b の積で表すことができる。 a, b が互いに素であるとするとき、 a, b の組 (a, b) はいくつあるか。
ただし、例えば、 $(a, b) = (1, 360), (360, 1)$ は、異なる組としてあつかうこととする。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 16 $\triangle ABC$ の各頂点を移動する動点Pについて考える。動点Pは、1個のさいころを投げたとき、5の目が出れば時計回りに、6の目が出れば反時計回りにそれぞれ隣の頂点に移り、1, 2, 3, 4の目が出れば移動しないものとする。さいころを n 回(n は0以上の整数)投げたあと、動点Pが頂点A上にある確率を p_n とする。
 $\lim_{n \rightarrow \infty} 6p_n$ の値を求めよ。ただし、動点Pは、最初には、頂点A上に存在するものとする。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 17 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 4x}{x + \sin x}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

- 18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = k$ としたとき、 $a < (2.7)^k < a + 1$ となる整数 a が存在する。
 a の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 ナ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

19 曲線 $C: y = 3x^4 + 4x^3 - 102x^2 + 180x + 10$ と直線 $l: y = k$ (k は実数) について考える。曲線 C と直線 l がすべて異なる 4 つの点で交わる時、 k のとりうる範囲は、 $a < k < b$ となる。 $\frac{a+b}{26}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

20 数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1$ 、 n が 2 以上の自然数では、 $\int_0^1 (a_{n-1}x - a_n)x^n dx = 0$ を満たす。 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2na_n$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

21 関数 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ の最大値を M 、最小値を m とする。 $|4Mm|$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 ハ 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 リ 9

22 2つの曲線 $C1 : y = x^3 - x^2 - 12x - 1$ と $C2 : y = -x^3 + 2x^2 + a$ について考える。曲線 $C1$ と $C2$ が共有点を持ち、その点で共通の接線をもつとき、 $\frac{a}{2}$ の値を求めよ。ただし、 a は自然数とする。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 八 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

23 2つの曲線 $C1 : ny = x^2$ と $C2 : (n+1)x = y^2$ (n は自然数, $x \geq 0, y \geq 0$) について考える。曲線 $C1$ と $C2$ で囲まれた部分の面積を S_n とする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27S_n}{n^2}$ の値を求めよ。

- ア 0 カ 1 サ 2 タ 3 チ 4
 八 5 マ 6 ヤ 7 ラ 8 ワ 9

24 円 $C: x^2 + y^2 = 4$ と直線 $l: y = k$ (k は正の実数) について考える。円 C と直線 l は、異なる 2 つの点 $P(p, k)$, $S(s, k)$ で交わることとする ($s > p$)。円 C と x 軸との 2 つの交点を $Q(-2, 0)$, $R(2, 0)$ としたとき、四角形 $PQRS$ の面積の最大値を M とする。 $\frac{M}{\sqrt{3}}$ の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9

25 動点 P の座標は、 $P(1 - \cos \theta, \theta - \sin \theta)$ として与えられる ($0 \leq \theta \leq 2\pi$)。動点 P の動いた長さを L とする。 L の値を求めよ。

- (ア) 0 (カ) 1 (サ) 2 (タ) 3 (チ) 4
 (ハ) 5 (マ) 6 (ヤ) 7 (ラ) 8 (ワ) 9