

[解答]

⊕

[解説]

$$f(x) = x^4 - 4x + a$$

とおく。ここで、 $x^2 - 2bx + b^2$ は

$$x^2 - 2bx + b^2 = (x - b)^2$$

と因数分解できるので、 $x^4 - 4x + a$ は $(x - b)^2$ を因数に持つ。よって、

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

は $(x - b)$ を因数にもつので、

$$f'(b) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4b^3 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 1 (\because b \text{ は実数})$$

となる。これを

$$f(b) = 0 \Leftrightarrow b^4 - 4b + a = 0$$

に代入して、

$$1 - 4 + a = 0$$

$$\therefore a = 3$$

となる。以上より、

$$a + b = 3 + 1 = 4$$

となる。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

$29^x = 49$ より、両辺に 29 を底とする対数をとって

$$x = \log_{29} 49 = 2 \log_{29} 7$$

となる。また、 $1421^y = 2401$ から、同様に 1421 を底とする対数をとって

$$\begin{aligned} y &= \log_{1421} 2401 \\ &= 4 \log_{1421} 7 \\ &= 4 \cdot \frac{\log_{29} 7}{\log_{29} 7^2 \cdot 29} \\ &= 4 \cdot \frac{\log_{29} 7}{1 + 2 \log_{29} 7} \\ &= \frac{2x}{x+1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{2x-y}{xy} = \frac{2x - \frac{2x}{x+1}}{x \cdot \frac{2x}{x+1}} = \frac{2x^2 + 2x - 2x}{2x^2} = 1$$

である。

[解答]

⑰

[解説]

法を10として,

$$\begin{aligned}7^{2018} &= (7^4)^{504} \cdot 7^2 \\&= 2401^{504} \cdot 49 \\&\equiv 1 \cdot 9 \\&= 9\end{aligned}$$

より, 一の位は9である。

[解答]

⑦

[解説]

1つ目の式について,

$$\log_x y + 3 \log_y x = 4$$

$$\Leftrightarrow \log_x y + \frac{3}{\log_x y} = 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_x y)^2 - 4 \log_x y + 3 = 0 \quad (\because \log_x y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\log_x y - 1)(\log_x y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_x y = 1, 3$$

$$\Leftrightarrow y = x, x^3$$

となる。2つ目の式から

$$\log_x (x^2 + 4y) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4y = x^3$$

であるので, $y = x$ の場合,

$$x^2 + 4x = x^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \quad (\because x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad (\because x > 0)$$

となり, たしかに成立する。 $y = x^3$ の場合,

$$x^2 + 4x^3 = x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, -\frac{1}{3}$$

となり, $x > 0$ を満たす x が存在しないため不適である。よって $x = y$ であり,

$$y - x = 0$$

である。

[解答]

㊦

[解説]

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ であるとき,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

に代入して,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

が成立する。よって,

$$\begin{aligned} & 2 \sin^3 \theta + 2 \cos^3 \theta - 3 \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \\ &= 2(\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 3 \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{3}{8}\right) + \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。

[解答]

⑦

[解説]

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta - \sin \theta &= \cos 3\theta + \cos \theta \\
 \Leftrightarrow 2 \cos 2\theta \sin \theta &= 2 \cos \theta \cos \theta \\
 \Leftrightarrow 2 \cos 2\theta (\sin \theta - \cos \theta) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos 2\theta \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ より、 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$ 、 $0 \leq 2\theta \leq 4\pi$ であるので、条件を満たすのは

$$\theta - \frac{\pi}{4} = 0, \pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$$

もしくは

$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

のときである。以上より、

$$a = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = 4\pi$$

であるので、

$$\frac{2a}{\pi} = 8$$

となる。

[解答]

⑦

[解説]

$$a \sin^2 x + 6 \sin x + 1 = (a-9) \sin^2 x + (3 \sin x + 1)^2$$

であるから、 $\sin x = -\frac{1}{3}$ のとき、

$$a \sin^2 x + 6 \sin x + 1 = (a-9) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{a}{9} - 1$$

であるので、常に0以上となるためには

$$\frac{a}{9} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 9$$

であることが必要。また、 $a=9$ のとき

$$9 \sin^2 x + 6 \sin x + 1 = (3 \sin x + 1)^2 \geq 0$$

となり、たしかに成立する。よって、 a の最小値は9である。

[解答]



[解説]

$$x^2 + 7xy + 12y^2 + x + 3y = 9$$

$$\Leftrightarrow (x+3y)(x+4y+1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (x+3y, x+4y+1) = (\pm 1, \pm 9), (\pm 3, \pm 3), (\pm 9, \pm 1) \text{ (複号同順)}$$

である。ここで、 $(x+3y, x+4y+1) = (a, b)$ のように整数 a, b が対応したとき、それぞれの差をとって、

$$y+1 = b-a \Leftrightarrow y = b-a-1$$

であり、 $x+3y = a$ に代入して

$$x = a - 3(b-a-1) = 4a - 3b + 3$$

となる。よって、 a, b が整数のとき x, y も整数であるので、整数 (x, y) の組は 6 組である。

[解答]

⑦

[解説]

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi$$

であるので,

$$\left(\cos \frac{5}{12}\pi + i \sin \frac{5}{12}\pi\right)^8 = \cos \frac{10}{3}\pi + i \sin \frac{10}{3}\pi = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

となる。よって,

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \sqrt{3}^2 = 3$$

となる。

[解答]

④

[解説]

$x^3 + x^2 - x + a = 0$ に $x = \cos \theta + i \sin \theta$ を代入して,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 + (\cos \theta + i \sin \theta)^2 - (\cos \theta + i \sin \theta) + a = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 3\theta + \cos 2\theta - \cos \theta + a) + (\sin 3\theta + \sin 2\theta - \sin \theta)i = 0$$

となる。ここで、 $\cos 3\theta + \cos 2\theta - \cos \theta + a$, $\sin 3\theta + \sin 2\theta - \sin \theta$ はともに実数であるので,

$$\begin{cases} \cos 3\theta + \cos 2\theta - \cos \theta + a = 0 & \cdots \text{①} \\ \sin 3\theta + \sin 2\theta - \sin \theta = 0 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

が得られる。②より,

$$3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta + \cos \theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta \{1 - 2(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta \neq 0$, $\cos \theta + 1 \neq 0$ であるので,

$$2 \cos \theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

となるので、①より

$$\cos \pi + \cos \frac{2}{3}\pi - \cos \frac{\pi}{3} + a = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

である。

[解答]

㊴

[解説]

$$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

より、円Cの中心は(3, 2)、半径は2である。円と直線は接するため、円の中心と直線の距離は半径の長さに等しく、

$$\frac{|3a - 2 + 1 - a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |3a - 2 + 1 - a| = 2\sqrt{a^2 + 1} \Leftrightarrow |2a - 1| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

となる。両辺正より、2乗して

$$4a^2 - 4a + 1 = 4a^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 4a = -3$$

$$\therefore |4a| = 3$$

となる。

[解答]

⑦

[解説]

直線 OP と円 C の 2 交点を Q, R とすると、方べきの定理より、

$$PQ \cdot PR = PA \cdot PB = 9$$

であり、円 C の半径は 4 であるから、

$$\begin{aligned} PQ \cdot PR &= (OP - 4) \cdot (OP + 4) \\ &= OP^2 - 16 \end{aligned}$$

となるので、

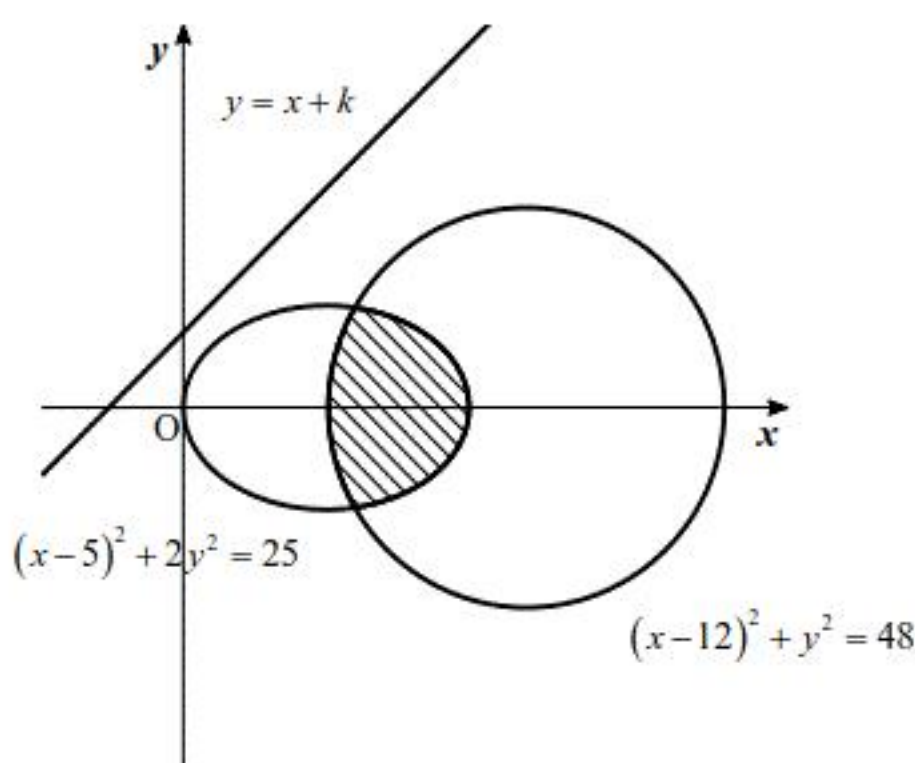
$$|OP^2 - 16| = 9$$

が得られる。

[解答]

⊕

[解説]



$y - x = k \Leftrightarrow y = x + k$ と置く。この式が表す直線が $(x-5)^2 + 2y^2 \leq 25$ かつ $(x-12)^2 + y^2 \leq 48$ の

表す領域と共有点をもつときの k の最大値が M となる。 $(x-5)^2 + 2y^2 = 25$ と

$(x-12)^2 + y^2 = 48$ より y を消去して、

$$(x-5)^2 + 2\{48 - (x-12)^2\} = 25 \Leftrightarrow x = 6, 32$$

であり、このうち $x = 32$ はもとの式に代入したときに y が実数とならないため不適である。

よって共有点の x 座標は 6 であり、 $(x-5)^2 + 2y^2 = 25$ に代入して

$$(6-5)^2 + 2y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

となり、共有点は $(6, 2\sqrt{3})$, $(6, -2\sqrt{3})$ となる。このうち、 k がより大きいのは $(6, 2\sqrt{3})$ を通るときであり、

$$2\sqrt{3} = 6 + k \Leftrightarrow k = 2\sqrt{3} - 6$$

となる。 k が最大値となるのは $(6, 2\sqrt{3})$ を通るときか接するときのいずれかであると考えら

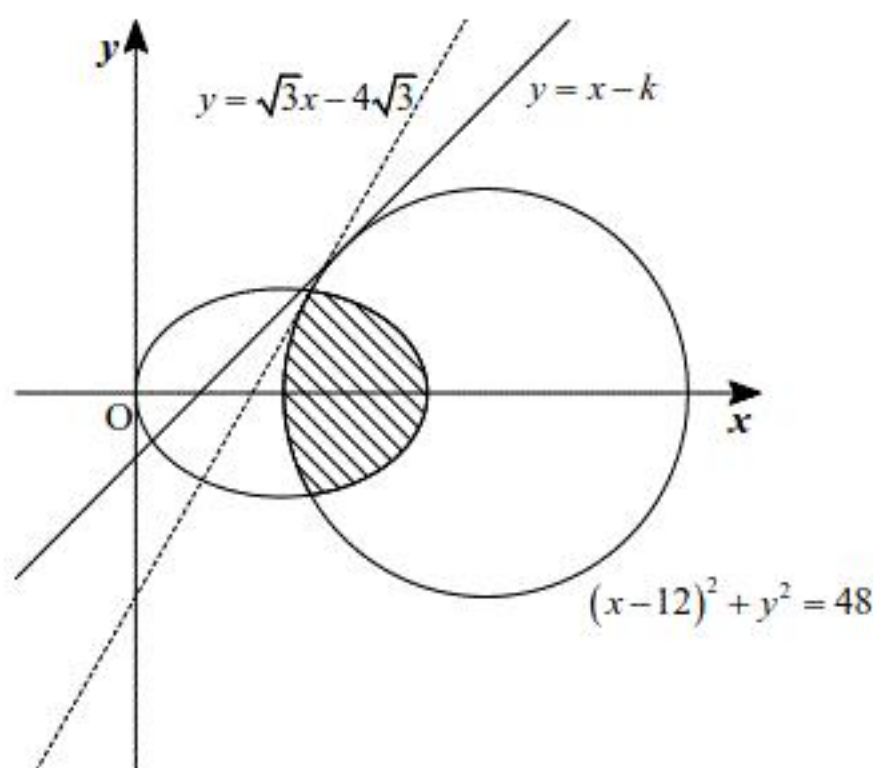
れるが、領域中の $(x-5)^2 + 2y^2 = 25$ が表す部分に接するときは、 $y = x + k$ の傾きが正である

ことから $(6, 2\sqrt{3})$ を通るときよりも k が小さくなる。また、 $(x-12)^2 + y^2 = 48$ に $y = x + k$ が接

するときについては、 $(6, 2\sqrt{3})$ における円の接線が

$$\begin{aligned} (6-12)(x-12) + 2\sqrt{3}y &= 48 \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

であることと図より、 $y = x + k$ と円が領域の範囲内において接することはない。



よって以上より k の最大値は $(6, 2\sqrt{3})$ を通るときで、

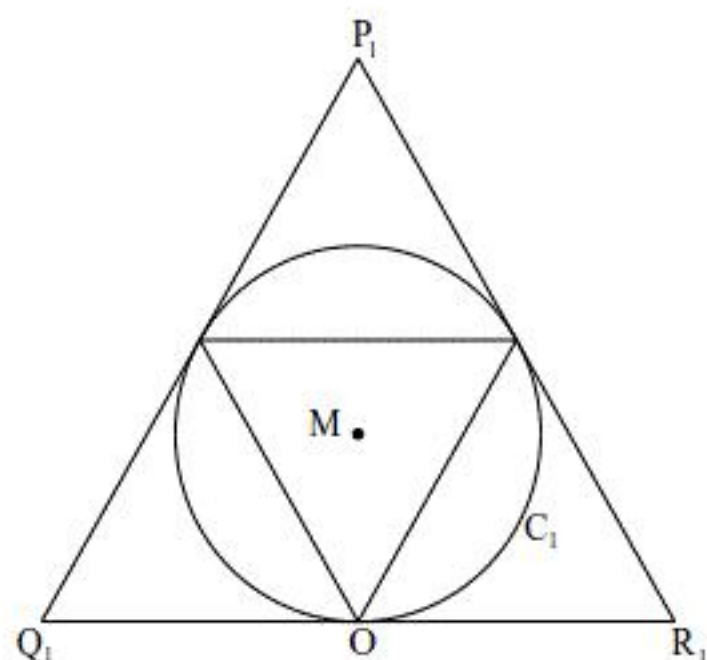
$$\begin{aligned} M &= 2\sqrt{3} - 6 \\ \therefore \frac{(M+6)^2}{3} &= \frac{(2\sqrt{3} - 6 + 6)^2}{3} = 4 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

⑦

〔解説〕



まず、円 C_1 の面積を考える。このとき、円の中心は正三角形 $P_1Q_1R_1$ の内心であり、正三角形の内心と重心は一致する。よって、円の中心を M 、辺 Q_1R_1 の中点を O と置くと、

$$OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

となる。これが円 C_1 の半径に一致するので、円 C_1 の面積は

$$S_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a \right)^2 \pi = \frac{\pi a^2}{12}$$

となる。 $\triangle P_nQ_nR_n$ と $\triangle P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1}$ の相似比は $2:1$ であるから、 C_n と C_{n+1} の相似比も同様に $2:1$ となる。よって

$$S_{n+1} = \frac{1}{4}S_n$$

であるので、自然数 k について

$$\sum_{n=1}^k S_n = S_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4S_1}{3} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k \right\}$$

であるので、

$$\frac{36}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{36}{\pi a^2} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4S_1}{3} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k \right\} = \frac{36}{\pi a^2} \cdot \frac{4S_1}{3} = 4$$

となる。

[解答]

④

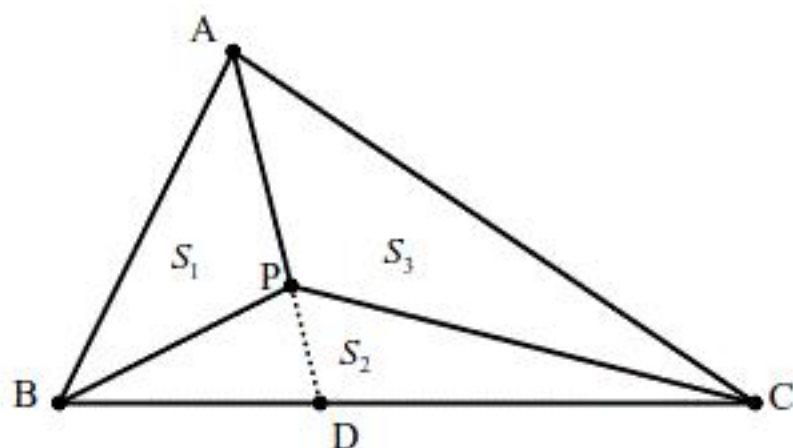
[解説]

$$4\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{AP} + 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \left(\frac{5}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} \right)$$

より、辺 BC を $3:5$ に内分する点を D とおくと、 P は辺 AD を $2:1$ に内分する点である。



S_1 と S_3 の比は BD と CD の比に等しく、

$$S_1 : S_3 = BD : CD = 3 : 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 S_1 と S_3 の和と S_2 の比は AP と DP の比に等しいため

$$(S_1 + S_3) : S_2 = AP : DP = 2 : 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であり、①、②から

$$S_1 : S_2 : S_3 = 3 : \frac{(3+5)}{2} : 5 = 3 : 4 : 5$$

となるので、以上より、

$$a + b - 7 = 4 + 5 - 7 = 2$$

となる。

〔解答〕

⊕

〔解説〕

$$\overrightarrow{AB} = (3, 6, 3), \overrightarrow{AC} = (3, 9, 7), \overrightarrow{AD} = (10, 2, a-3)$$

と表せる。4点が同一平面上にあるとき、実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (3s + 3t, 6s + 9t, 3s + 7t)\end{aligned}$$

とおけるので、2通りで表された $\overrightarrow{AD}$ を比較して、

$$\begin{cases} 3s + 3t = 10 & \cdots \text{①} \\ 6s + 9t = 2 & \cdots \text{②} \\ 3s + 7t = a - 3 & \cdots \text{③} \end{cases}$$

となる。② $-2 \times$ ① より

$$3t = -18$$

$$\therefore t = -6$$

であり、これを①に代入して

$$3s - 18 = 10$$

$$\therefore s = \frac{28}{3}$$

となる。よって、③より

$$28 - 42 = a - 3 \Leftrightarrow a = -11$$

$$\therefore |a + 4| = 7$$

である。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1} - 2}{x_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3x_n + 2}{x_n + 2} - 2}{\frac{3x_n + 2}{x_n + 2} + 1} = \frac{3x_n + 2 - 2x_n - 4}{3x_n + 2 + x_n + 2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x_n - 2}{x_n + 1} = \frac{1}{4} y_n$$

より、数列 $\{y_n\}$ は初項が

$$y_1 = \frac{x_1 - 2}{x_1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

であり、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} y_n &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{x_n - 2}{x_n + 1} &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 4^{n-1} x_n - 4^n &= -x_n - 1 \\ \Leftrightarrow x_n &= \frac{4^n - 1}{2 \cdot 4^{n-1} + 1} \end{aligned}$$

となるので、 $a = b = 1$ となり、

$$\frac{b}{a} = 1$$

が得られる。

[解答]

⑦

[解説]

 $n=1$ のとき,

$$a_1 = S_1 = 1^3 - 41 \cdot 1^2 = -40$$

となる。 $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^3 - 41n^2 - (n-1)^3 + 41(n-1)^2 \\ &= n^3 - 41n^2 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 + 41n^2 - 82n + 41 \\ &= 3n^2 - 85n + 42 \\ &= 3\left(n - \frac{85}{6}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{85}{6}\right)^2 + 42 \end{aligned}$$

であり, $\frac{85}{6} = 14.1\ldots$ であることから最小値は a_{14} か a_{15} のいずれかである。

$$a_{14} = 3 \cdot 14^2 - 85 \cdot 14 + 42 = -560$$

$$a_{15} = 3 \cdot 15^2 - 85 \cdot 15 + 42 = -558$$

より最小値は a_{14} であり, これは a_1 よりも小さい。よって,

$$\left| \frac{m}{70} \right| = \left| \frac{-560}{70} \right| = 8$$

となる。

[解答]

⑧

[解説]

a, b の和が X ($2 \leq X \leq 7$) のとき、条件を満たす a, b の組は

$$(a, b) = (1, X-1), (2, X-2), \dots, (X-1, 1)$$

より $X-1$ 組存在する。以下ではこれを利用して、 $2c+2d$ で場合分けしてそれぞれの条件を満たす a, b の組の数を求める。

[1] $c+d=2$ のとき

このとき、条件を満たす c, d の組は $(c, d) = (1, 1)$ のみ。

$$a+b+2c+2d \leq 10$$

$$\Leftrightarrow a+b \leq 6$$

が成立するので、条件を満たす (a, b) の組の数は

$$1+2+3+4+5=15 \text{ (組)}$$

となる。

[2] $c+d=3$ のとき

このとき、条件を満たす c, d の組は $(c, d) = (1, 2), (2, 1)$ である。

$$a+b+2c+2d \leq 10$$

$$\Leftrightarrow a+b \leq 4$$

が成立するので、条件を満たす (a, b) の組の数は

$$1+2+3=6 \text{ (組)}$$

となる。

[3] $c+d=4$ のとき

このとき、条件を満たす c, d の組は $(c, d) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$ である。

$$a+b+2c+2d \leq 10$$

$$\Leftrightarrow a+b \leq 2$$

が成立するので、条件を満たす (a, b) の組は $(a, b) = (1, 1)$ のみである。

[4] $c+d \geq 5$ のとき

このとき、 $2c+2d \geq 10$ となるため $a+b \leq 0$ となり、条件を満たす a, b の組は存在しない。

以上、[1], [2], [3], [4] より、条件を満たす a, b, c, d の組の数は

$$15 \times 1 + 6 \times 2 + 1 \times 3 = 30 \text{ (組)}$$

となるので、

$$p = \frac{30}{6^4} = \frac{5}{216}$$

$$\therefore 216p = 5$$

となる。

[解答]

④

[解説]

全ての位の数字が異なる整数は、千の位に0が来ないことを考慮して、

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536 \text{ (通り)}$$

存在する。よって、

$$p = 1 - \frac{4536}{9000} = \frac{62}{125}$$

$$\therefore \frac{125}{31} p = 2$$

となる。

[解答]



[解説]

$$f(x) = x^3 - x^2 - 12x - 1, g(x) = -x^3 + 2x^2 + a$$

とおく。C1とC2が接するとき、接点の x 座標を t とすると

$$f(t) = g(t) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立する。

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 12$$

$$g'(x) = -3x^2 + 4x$$

より、②から

$$3t^2 - 2t - 12 = -3t^2 + 4t$$

$$\Leftrightarrow 6(t-2)(t+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2, -1$$

が成立する。 $t = 2$ の場合、①より

$$f(2) = g(2)$$

$$\Leftrightarrow 2^3 - 2^2 - 12 \cdot 2 - 1 = -2^3 + 2 \cdot 2^2 + a$$

$$\Leftrightarrow a = -21 (< 0)$$

となり、 a が自然数とならないため不適である。 $t = -1$ のとき、①より

$$f(-1) = g(-1)$$

$$\Leftrightarrow (-1)^3 - (-1)^2 - 12 \cdot (-1) - 1 = -(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + a$$

$$\Leftrightarrow a = 6$$

より、確かに a が自然数となる。よって $a = 6$ である。

[解答]



[解説]

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 34}{x^2 - x + 3} \\
 &= x^2 - x - 5 + \frac{49}{x^2 - x + 3} \\
 &= x^2 - x + 3 + \frac{49}{x^2 - x + 3} - 8
 \end{aligned}$$

である。

$$x^2 - x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$$

より $x^2 - x + 3 > 0$, $\frac{49}{x^2 - x + 3} > 0$ であるので、相加平均と相乗平均の関係より

$$x^2 - x + 3 + \frac{49}{x^2 - x + 3} \geq 2\sqrt{(x^2 - x + 3) \cdot \frac{49}{x^2 - x + 3}} = 14$$

が成立する。等号成立条件は

$$\begin{aligned}
 x^2 - x + 3 &= \frac{49}{x^2 - x + 3} \\
 \Leftrightarrow (x^2 - x + 3)^2 &= 49 \\
 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 &= \pm 7 \\
 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 &= 0 \text{ または } x^2 - x + 10 = 0 \\
 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} &\text{ または } x = \frac{1 \pm \sqrt{39}i}{2}
 \end{aligned}$$

となり、 $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ を確かに取りうる。以上より、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - x + 3 + \frac{49}{x^2 - x + 3} - 8 \\
 &\geq 14 - 8 \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

となり、最小値は6である。

[解答]

⑦

[解説]

$y = \frac{1}{x}$ について、 $y' = -\frac{1}{x^2}$ が成立する。曲線 C に $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ で接する接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{t^2}(x-t) + \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}x + \frac{2}{t}$$

であり、これが点 $P(k, k)$ を通るとき

$$\begin{aligned} k &= -\frac{1}{t^2}k + \frac{2}{t} \\ \Leftrightarrow kt^2 - 2t + k &= 0 \end{aligned}$$

となる。この方程式の 2 解を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \frac{2}{k}, \alpha\beta = 1$$

となる。直線 PQ, PR と x 軸の正の方向がなす角をそれぞれ θ, μ とする。 $(\theta > \mu \text{ とする。})$ このとき、

$$\begin{aligned} \tan(\theta - \mu) &= \tan \frac{2}{3}\pi \\ \Leftrightarrow \frac{\left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(-\frac{1}{\beta^2}\right)} &= -\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{-(\alpha + \beta)\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{\alpha^2\beta^2}}{1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}} &= -\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{k} \sqrt{\frac{4}{k^2} - 4} &= 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{k^2} \left(\frac{4}{k^2} - 4\right) &= 12 \text{ か } \frac{4}{k^2} \left(\frac{4}{k^2} - 4\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{k^2}\right)^2 - 4\left(\frac{4}{k^2}\right) - 12 &= 0 \text{ か } \frac{4}{k^2} \left(\frac{4}{k^2} - 4\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{k^2} - 6\right)\left(\frac{4}{k^2} + 2\right) &= 0 \text{ か } \frac{4}{k^2} \left(\frac{4}{k^2} - 4\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{k^2} = 6, -2 \text{ か } \frac{4}{k^2} \left(\frac{4}{k^2} - 4\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

となり、 $k > 0$ より $k^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{k^2} > 0$ なので、

$$\frac{4}{k^2} = 6 \Leftrightarrow 6k^2 = 4$$

となる。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

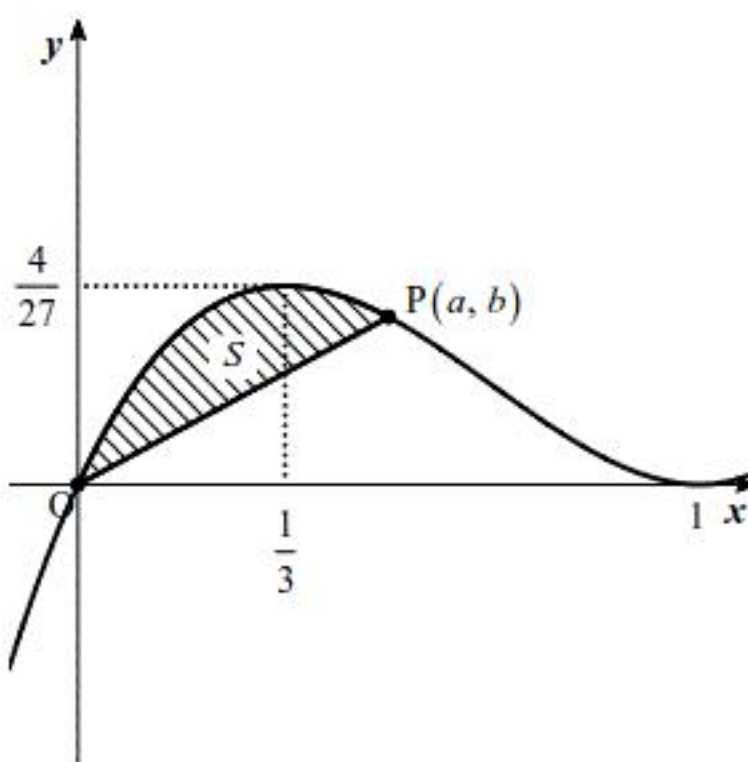
 $y = x^3 - 2x^2 + x$ について,

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$$

となるので, 増減表は以下の通り。

x	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって, グラフは下図のようになる。



線分 OP の傾きは

$$\frac{b}{a} = \frac{a^3 - 2a^2 + a}{a} = a^2 - 2a + 1$$

であるので, 面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left\{ x^3 - 2x^2 + x - (a^2 - 2a + 1)x \right\} \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{a^2 - 2a + 1}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= -\frac{a^4}{4} + \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

となる。また, 長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + (a^3 - 2a^2 + a)^2} \\ &= (a^6 - 4a^5 + 6a^4 - 4a^3 + 2a^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であるので,

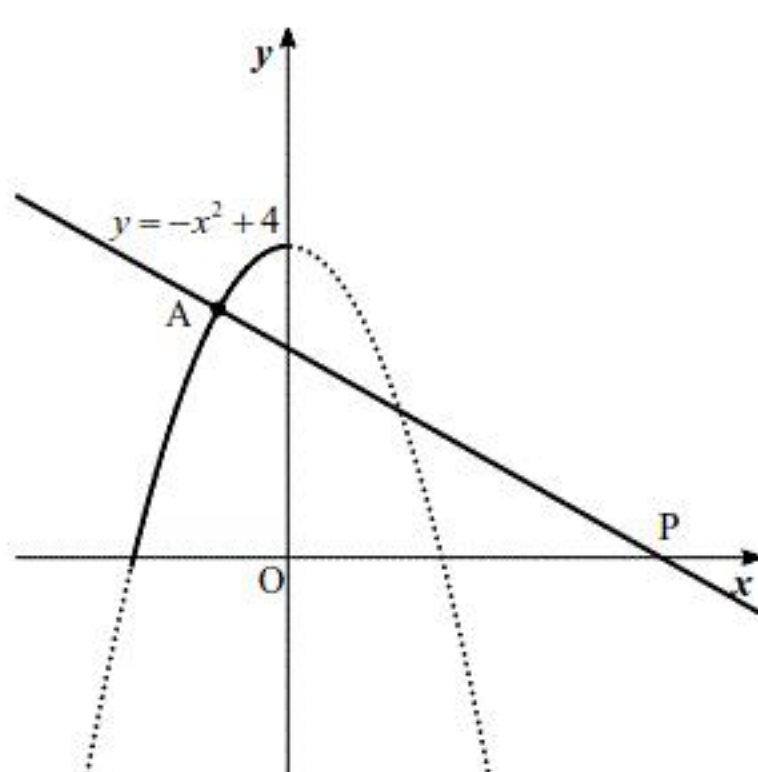
$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{48\sqrt{2}S}{L^3} &= 48\sqrt{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{S}{L^3} \\ &= 48\sqrt{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\frac{a^4}{4} + \frac{a^3}{3}}{(a^6 - 4a^5 + 6a^4 - 4a^3 + 2a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 48\sqrt{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{a^4}{4} + \frac{a^3}{3}\right) \times a^{-3}}{(a^6 - 4a^5 + 6a^4 - 4a^3 + 2a^2)^{\frac{3}{2}} \times (a^{-2})^{\frac{3}{2}}} \\ &= 48\sqrt{2} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\frac{a}{4} + \frac{1}{3}}{(a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 48\sqrt{2} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{2\sqrt{2}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

⑦

〔解説〕



$y = -x^2 + 4$ について、 $y' = -2x$ であるので、点 A の x 座標を a と置いた時の法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2a}(x-a) - a^2 + 4 \\ &= \frac{1}{2a}x - a^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。これに $y = 0$ を代入すると

$$0 = \frac{1}{2a}x - a^2 + \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = 2a^3 - 7a$$

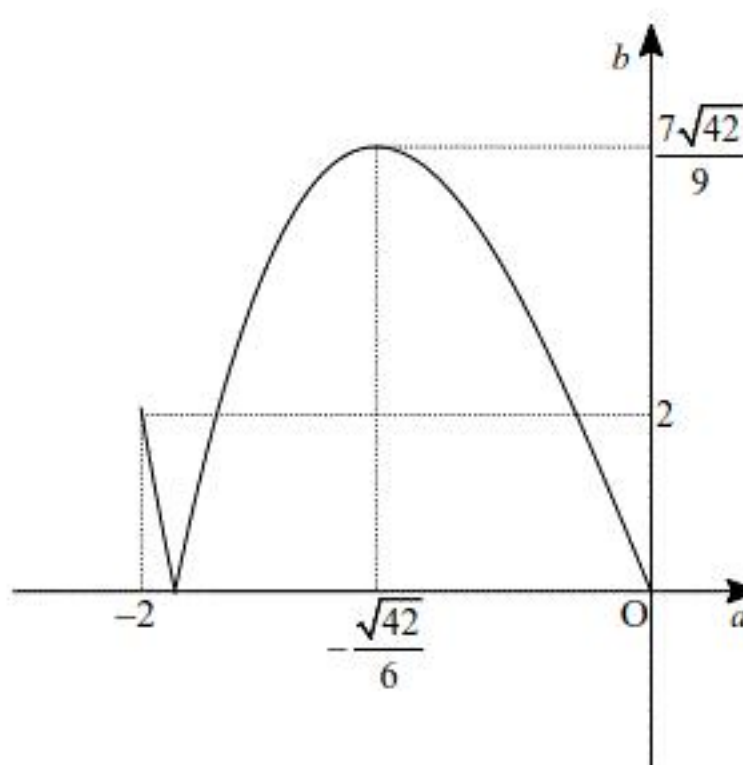
となる。 $f(a) = |2a^3 - 7a|$ とおき、 $g(a) = 2a^3 - 7a$ とおくと、

$$g'(a) = 6a^2 - 7 = 6\left(a + \frac{\sqrt{42}}{6}\right)\left(a - \frac{\sqrt{42}}{6}\right)$$

となるので、増減表は下表の通り。

a	-2		$-\frac{\sqrt{42}}{6}$		0
$g'(a)$		$+$		$-$	
$g(a)$	-2	$\nearrow$	最大	$\searrow$	0

よって、 $b = f(a)$ のグラフの概形は次のようになる。



これより、

$$\begin{aligned} M &= f\left(-\frac{\sqrt{42}}{6}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{42}}{6}\right)^3 - 7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{42}}{6}\right) = \frac{7\sqrt{42}}{9} \\ \therefore \frac{9}{\sqrt{42}}M &= \frac{9}{\sqrt{42}} \cdot \frac{7\sqrt{42}}{9} = 7 \end{aligned}$$

となる。