

|

〔解答〕

㊦

〔解説〕

$$x^3 - 2a^2x + 4a^3 = (x + 2a)(x^2 - 2ax + 2a^2)$$

より、 A を B で割った余りは 0 である。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

真数条件より、 $x > 0$ であるから、 $\alpha, \beta > 0$ である。よって、 $\alpha' = \log_{10} \alpha$, $\beta' = \log_{10} \beta$ とすると、

$$\begin{aligned} & (\log_{10} x - \log_{10} 2)(\log_{10} x - \log_{10} 4) = 1 \\ \Leftrightarrow & (\log_{10} x)^2 - (\log_{10} 2 + \log_{10} 2^2)\log_{10} x + \log_{10} 2 \cdot \log_{10} 4 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (\log_{10} x)^2 - 3\log_{10} 2 \cdot \log_{10} x + \log_{10} 2 \cdot \log_{10} 4 - 1 = 0 \end{aligned}$$

より、 $\log_{10} x$ の 2 次方程式とみて、解と係数の関係から

$$\begin{aligned} & \alpha' + \beta' = 3\log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow & \log_{10} \alpha + \log_{10} \beta = 3\log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow & \log_{10} \alpha\beta = \log_{10} 2^3 \\ \Leftrightarrow & \alpha\beta = 8 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

㉑

〔解説〕

n と $n^2 - 2n + 3$ が素数であるような n について、 n の値の範囲で場合分けして考える。

[1] $n = 2$ のとき

$$n^2 - 2n + 3 = 3$$

より適する。

[2] $n \geq 3$ のとき

n が素数であるならば n は奇数である。ここで、

$$n^2 - 2n + 3 = (n-1)^2 + 2$$

より、 $n^2 - 2n + 3$ は n が奇数のとき偶数であり、かつ $n \geq 3$ より $n^2 - 2n + 3 \geq 6$ であるから、 $n^2 - 2n + 3$ は素数ではない。よって、不適である。

以上[1], [2]より、 $S = 2$ であるから、 $\frac{S}{2} = 1$ となる。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

 $x + y + z = a$ とおくと、 $x + 2y + 3z = 10$ より、

$$x + 2y + 3z = a + y + 2z$$

$$\Leftrightarrow a = 10 - (y + 2z)$$

である。したがって、 $y, z > 0$ より、 $y + 2z$ が最小となるとき a が最大となる。 y, z は自然数であるから、 $y, z = 1$ とすると、

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$\Leftrightarrow x + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

となり、条件を満たす。このとき、 a は最大値 $a = 5 + 1 + 1 = 7$ をとる。

〔解答〕

④

〔解説〕

A, B, C が同一直線上にあるとき, $\beta \neq \gamma$ より a を実数として,

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = a$$

が成り立つ。よって,

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = a$$

$$\Leftrightarrow \frac{xi - (4 + 3i)}{4 + 3i - (2 + 2i)} = a$$

$$\Leftrightarrow -4 + (x - 3)i = 2a + ai$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 2a \\ x - 3 = a \end{cases}$$

$$\therefore a = -2, x = 1$$

である。

〔別解〕

XY 平面上で, 点 A, B, C の座標を $A(0, x)$, $B(4, 3)$, $C(2, 2)$ とする。これらが同一直線上にあるときの x の値を求める。直線 BC の式は

$$Y = \frac{2-3}{2-4}(X-4)+3$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{2}X + 1$$

であるから, この直線上に $A(0, x)$ があるとき,

$$x = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1$$

$$\therefore x = 1$$

である。

[解答]

⑦

[解説]

 $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 1$ より,

$$\begin{aligned}
 (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 &= 1 \\
 \Leftrightarrow x^2 \sin^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha &= 1 \\
 \Leftrightarrow (10 - y^2) \sin^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + (10 - x^2) \cos^2 \alpha &= 1 \quad (\because x^2 + y^2 = 10) \\
 \Leftrightarrow x^2 \cos^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin^2 \alpha &= 10(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 1 \\
 \Leftrightarrow (x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 &= 9 \\
 \therefore |x \cos \alpha - y \sin \alpha| &= 3
 \end{aligned}$$

である。

[別解]

$$\begin{aligned}
 x \sin \alpha + y \cos \alpha &= \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \alpha + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \alpha \right) \\
 &= \sqrt{10} \left(\frac{x}{\sqrt{10}} \sin \alpha + \frac{y}{\sqrt{10}} \cos \alpha \right)
 \end{aligned}$$

である。 $\cos \beta = \frac{x}{\sqrt{10}}$, $\sin \beta = \frac{y}{\sqrt{10}}$ とおくと,

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sqrt{10} \sin(\alpha + \beta)$$

より,

$$\sqrt{10} \sin(\alpha + \beta) = 1 \Leftrightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

となる。このとき,

$$\begin{aligned}
 |x \cos \alpha - y \sin \alpha| &= \left| \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \alpha - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \alpha \right) \right| \\
 &= \sqrt{10} \left| \frac{x}{\sqrt{10}} \cos \alpha - \frac{y}{\sqrt{10}} \sin \alpha \right| \\
 &= \sqrt{10} |\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha| \\
 &= \sqrt{10} |\cos(\alpha + \beta)| \\
 &= \sqrt{10} \sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} \\
 &= \sqrt{10} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

条件より、点Bは線分OAの midpoint となることから、座標は $\left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となる。また、点 $(t, 0)$ をD

とすると、 $\angle BOC = \angle DOA$ ， $\angle CBO = \angle ADO = 90^\circ$ より2角の大きさが等しいから、
 $\triangle BOC \sim \triangle DOA$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\triangle BOC &= \left(\frac{BO}{DO}\right)^2 \cdot \triangle DOA \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{2}\right)^2}{t^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot DO \cdot OA \\ &= \frac{1+t^2}{8t^2} \cdot t \cdot 1 \\ &= \frac{1+t^2}{8t}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle OBC$ の面積が1であるとき、

$$\begin{aligned}\frac{1+t^2}{8t} &= 1 \\ \Leftrightarrow t^2 + 1 &= 8t \\ \therefore t^2 - 8t + 1 &= 0\end{aligned}$$

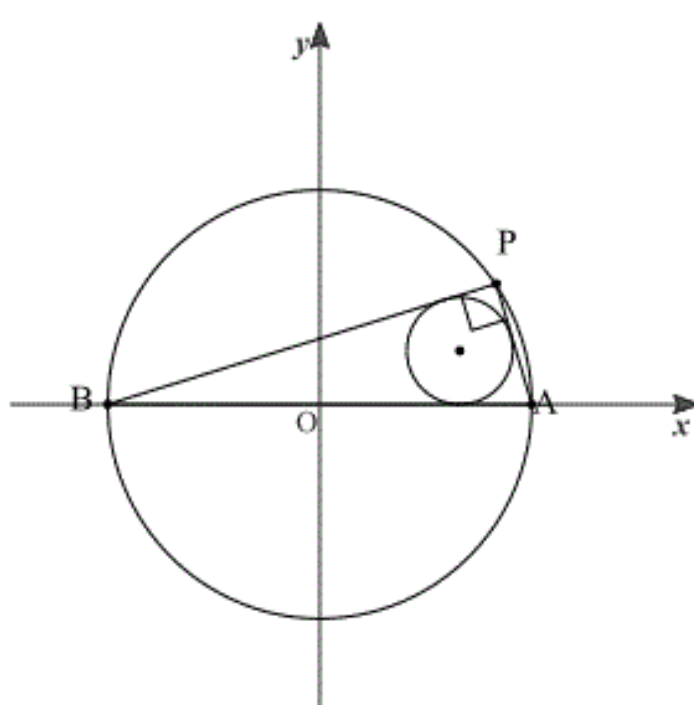
であり、 α, β はこの t についての2次方程式の解であるから、解と係数の関係より、
 $\alpha + \beta = 8$ である。

〔解答〕

㊷

〔解説〕

問題文の状況を図示すると下のようになる。

ABを底辺と考えると $\triangle ABP$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \{5 - (-5)\} = 5y \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また、内接円の半径を r とすると、内接円の面積は円 C の面積の $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2$ であるから、 $r = \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4}$ である。よって、 $\triangle ABP$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} r (AB + AP + BP) \\ &= \frac{5}{8} (AB + AP + BP) \end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} 5y &= \frac{5}{8} (AB + AP + BP) \\ \Leftrightarrow 5y - \frac{5}{8} AB &= \frac{5}{8} (AP + BP) \end{aligned}$$

となる。ここで、両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} \left(5y - \frac{5}{8} AB\right)^2 &= \left(\frac{5}{8}\right)^2 (AP + BP)^2 \\ \Leftrightarrow 25y^2 - \frac{25}{4} AB \cdot y &= 2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 AP \cdot BP \quad (\because AB^2 = AP^2 + BP^2) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\angle APB = 90^\circ$ であり、 $\triangle ABP$ の面積 S が

$$S = \frac{1}{2} AP \cdot BP$$

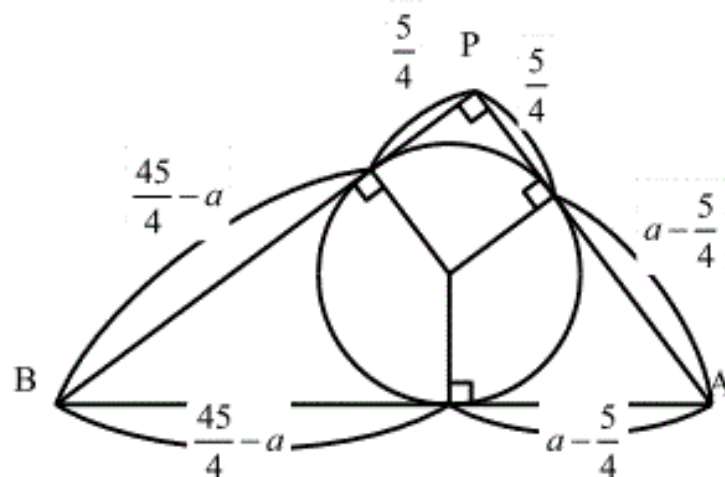
と表せることから、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \Leftrightarrow 25y^2 - \frac{25}{4} \cdot 10y &= 2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 10y \quad (\because AP \cdot BP = 10y) \\ \Leftrightarrow 25y^2 - \frac{125 \cdot 9}{16} y &= 0 \\ \therefore y &= \frac{45}{16} \quad (\because y > 0) \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \frac{8\sqrt{S}}{5} &= \frac{8\sqrt{5y}}{5} \\ &= \frac{8\sqrt{5 \cdot \frac{45 \cdot 9}{16}}}{5} \\ &= 6 \end{aligned}$$

とわかる。

〔別解〕($r = \frac{5}{4}$ までは同じ)正の実数 a を用いて、 $PA = a$ とおくと、 $PB = \frac{25}{2} - a$ であるから、

$$\begin{aligned} PA + PB &= \frac{25}{2} \\ \therefore PA^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot PA \cdot PB + PB^2 &= \left(\frac{25}{2}\right)^2 \\ \therefore 4S &= \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 10^2 \\ \therefore S &= \frac{3^2 5^2}{4^2} \\ \therefore \frac{8\sqrt{S}}{5} &= 6 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

⊕

〔解説〕

$\sin x = X$ とおくと、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq X \leq 1$ である。

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x + a \sin x + a - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (1 - \sin^2 x) + a \sin x + a - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin^2 x - a \sin x - a + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow X^2 - aX - a + 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow X^2 + 1 &= a(X + 1) \\
 \Leftrightarrow a &= \frac{X^2 + 1}{X + 1} \quad (\because X + 1 > 0)
 \end{aligned}$$

より、 $f(X) = \frac{X^2 + 1}{X + 1}$ とおくと、 $0 \leq X \leq 1$ における $f(X)$ の最大値が M 、最小値が m となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 f'(X) &= \frac{2X(X+1) - (X^2+1)}{(X+1)^2} \\
 &= \frac{X^2 + 2X - 1}{(X+1)^2}
 \end{aligned}$$

であるから、 $f'(X)$ と $X^2 + 2X - 1$ の符号は一致し、

$$\begin{aligned}
 X^2 + 2X - 1 &= 0 \\
 \therefore X &= -1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

より、 $f(X)$ の増減表は以下のようになる。

X	0	...	$\sqrt{2}-1$	...	1
$f'(X)$		-	0	+	
$f(X)$	1	$\searrow$	$2\sqrt{2}-2$	$\nearrow$	1

よって、 $M=1$ 、 $m=2\sqrt{2}-2$ とわかる。以上より、

$$\frac{(2M+m)^2}{2} = \frac{(2+2\sqrt{2}-2)^2}{2} = 4$$

である。

〔別解〕

$\sin x = X$ とおくと、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より $0 \leq X \leq 1$ である。

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x + a \sin x + a - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (1 - \sin^2 x) + a \sin x + a - 2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \sin^2 x - a \sin x - a + 1 &= 0 \\
 \therefore X^2 - aX - a + 1 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(X) = X^2 - aX - a + 1$ とおくと、2次方程式 $X^2 - aX - a + 1 = 0$ が $0 \leq X \leq 1$ に解を持つ条件は、 $X^2 - aX - a + 1 = 0$ の判別式を D とすると、

$$\text{「} D \geq 0 \text{ かつ } 0 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \text{ かつ } f(0) \geq 0 \text{ かつ } f(1) \geq 0 \text{」 または 「} f(0) \cdot f(1) < 0 \text{」}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 \text{「} a^2 + 4a - 4 \geq 0 \text{ かつ } 0 \leq a \leq 2 \text{ かつ } -a + 1 \geq 0 \text{ かつ } 2 - 2a \geq 0 \text{」 または} \\
 \text{「} (-a + 1) \cdot (2 - 2a) < 0 \text{」}
 \end{aligned}$$

つまり、

$$\begin{aligned}
 \text{「} a \leq -2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2} \leq a \text{ かつ } 0 \leq a \leq 2 \text{ かつ } a \leq 1 \text{ かつ } a \leq 1 \text{」 または} \\
 \text{「} 2(-a + 1)^2 < 0 \text{」}
 \end{aligned}$$

である。 $2(-a+1)^2 < 0$ を満たす a は存在しないから、 a の範囲は、

$$-2 + 2\sqrt{2} \leq a \leq 1$$

となり、 $m = -2 + 2\sqrt{2}$ 、 $M = 1$ である。よって、

$$\begin{aligned}
 \frac{(2M+m)^2}{2} &= \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

が得られる。

[解答]

⑧

[解説]

A, B, C, Dの袋からそれぞれ1個の球を取り出すとき、赤球が2個以上である事象は、赤球が0個か1個である事象の余事象である。ここで、A, B, C, Dの袋からそれぞれ1個の球を取り出すとき、赤球が0個である確率は、

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

であり、赤球が1個である確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \\ &= \frac{3+4+6+12}{60} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

であるから、

$$P = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{5}{12} \right) = \frac{23}{60}$$

となる。よって、 $\frac{23}{12P} = 5$ である。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

$f(x) = \left(\frac{3x+1}{25e}\right)^{\frac{6x+2}{7}}$ ($x > 0$) とおく。ここで、 $y = f(x)$ として両辺に対数をとって、 x で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} \left(\frac{d}{dy} \log y \right) &= \frac{6}{7} \log \frac{3x+1}{25e} + \frac{6x+2}{7} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3x+1} \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \frac{1}{y} &= \frac{6}{7} \left(\log \frac{3x+1}{25e} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{6}{7} y \left(\log \frac{3x+1}{25e} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{6}{7} \left(\frac{3x+1}{25e} \right)^{\frac{6x+2}{7}} \left(\log \frac{3x+1}{25e} + 1 \right)\end{aligned}$$

となる。よって、 $\left(\frac{3x+1}{25e}\right)^{\frac{6x+2}{7}} > 0$ より、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log \frac{3x+1}{25e} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log \frac{3x+1}{25e} &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{3x+1}{25e} &= e^{-1} \\ \Leftrightarrow 3x+1 &= 25 \\ \Leftrightarrow x &= 8\end{aligned}$$

である。 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	8	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			極小	

以上より、 $k=8$ で、 $\frac{k}{4}=2$ である。

〔別解〕

$M = \left(\frac{3n+1}{25e}\right)^{\frac{6n+2}{7}}$ の両辺の対数をとると、

$$\log M = \frac{6n+2}{7} \log \left(\frac{3n+1}{25e} \right)$$

となる。ここで、 $\frac{6n+2}{7} \log \left(\frac{3n+1}{25e} \right)$ が最小になるとき、 M も最小となる。 $3n+1=t$

($t \geq 4$) として、 t を実数全体に拡張して、 $g(t) = \frac{2t}{7} \log \frac{t}{25e}$ とおくと、

$$\begin{aligned}g'(t) &= \frac{2}{7} \log \frac{t}{25e} + \frac{2}{7} t \cdot \frac{1}{25e} \cdot \frac{25e}{t} \\ &= \frac{2}{7} \left(\log \frac{t}{25e} + 1 \right)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log \frac{t}{25e} &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{t}{25e} &= \frac{1}{e} \\ \therefore t &= 25\end{aligned}$$

であるから、 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	4	...	25	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$			極小	

$g(t)$ が最小値をとるのは $t=25$ のときであるから、 $n=k=8$ である。以上より、 $\frac{k}{4}=2$ である。

〔解答〕

⑦

〔解説〕

2つの接線の方程式は、

$$\frac{x_1x}{4} + y_1y = 1$$

$$\frac{x_2x}{4} + y_2y = 1$$

と表される。接線は $(1, t)$ を通るから、

$$\begin{cases} \frac{x_1}{4} + y_1t = 1 \\ \frac{x_2}{4} + y_2t = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 4y_1t \\ x_2 = 4 - 4y_2t \end{cases}$$

が成り立つ。また、 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ は $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を満たすから、 y_1, y_2 は

$$\frac{(4 - 4y_1t)^2}{4} + y_1^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (4t^2 + 1)y^2 - 8ty + 3 = 0$$

の2つの実数解に相当する。すなわち、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{8t}{4t^2 + 1} \\ y_1y_2 = \frac{3}{4t^2 + 1} \end{cases}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2|^2 &= (y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2 \\ &= \frac{64t^2 - 48t^2 - 12}{(4t^2 + 1)^2} \\ &= \frac{16t^2 - 12}{(4t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

であり、 $f(t) = \frac{16t^2 - 12}{(4t^2 + 1)^2}$ として増減を調べると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{32t(4t^2 + 1)^2 - 2(4t^2 + 1) \cdot 8t(16t^2 - 12)}{(4t^2 + 1)^4} \\ &= \frac{32t(4t^2 + 1) - 16t(16t^2 - 12)}{(4t^2 + 1)^3} \\ &= \frac{32t(4t^2 + 1 - 8t^2 + 6)}{(4t^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-32t(2t - \sqrt{7})(2t + \sqrt{7})}{(4t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

であるから $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	1	...	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	極大	↘

 $|y_1 - y_2|$ の増減と $|y_1 - y_2|^2$ の増減は一致するから、 $|y_1 - y_2|$ が最大になるのは $t = \frac{\sqrt{7}}{2}$ のときであり、このとき $4t^2 = 7$ である。

〔解答〕

㊦

〔解説〕

$X = \log_3 x, Y = \log_3 y$ とすると, $x \geq \frac{1}{27}, y \geq 3, xy = 27$ より, $X \geq -3, Y \geq 1,$

$\log_3 xy = 3 \Leftrightarrow X + Y = 3$ である。 $Y = 3 - X$ より, $Y \geq 1 \Leftrightarrow X \leq 2$ となる。したがって, X のとりうる範囲は $-3 \leq X \leq 2$ である。ここで,

$$\begin{aligned} & (\log_3 x)^2 (1 - 4 \log_3 y - 3 \log_3 x) - 8 \log_3 x \cdot \log_3 y \\ &= X^2 (1 - 4Y - 3X) - 8XY \\ &= X^2 \{1 - 4(3 - X) - 3X\} - 8X(3 - X) \quad (\because Y = 3 - X) \\ &= X^3 - 3X^2 - 24X \end{aligned}$$

であり, $f(X) = X^3 - 3X^2 - 24X$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(X) &= 3X^2 - 6X - 24 \\ &= 3(X - 4)(X + 2) \end{aligned}$$

であるから, $f(X)$ の増減表は以下のようになる。

X	-3	...	-2	...	2
$f'(X)$		+	0	-	
$f(X)$	18	↗	28	↘	-52

以上より, $M = 28, m = -52$ であるから, $\frac{M - m}{40} = 2$ を得る。

〔解答〕



〔解説〕

$f'(x) = 3x^2 - 6ax = 3x(x - 2a)$ より, $-1 \leq x \leq 2$ における増減表は以下のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-1 - 3a + b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$-4a^3 + b$	$\nearrow$	$8 - 12a + b$

ここで,

$$\begin{aligned}
 (-4a^3 + b) - (-1 - 3a + b) &= -4a^3 + 3a + 1 \\
 &= -(a-1)(2a+1)^2 \\
 &> 0 \quad (\because 0 < a < 1)
 \end{aligned}$$

より, $-4a^3 + b > -1 - 3a + b$ である。したがって, $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値は $-1 - 3a + b$ である。また, $(8 - 12a + b) - b = 8 - 12a$ の正負は a の値の範囲で異なる。以下, a の値の範囲で場合分けして考える。

[1] $0 < a \leq \frac{2}{3}$ のとき

$(8 - 12a + b) - b \geq 0$ であるから, $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値は $8 - 12a + b$ である。よって, 条件より,

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 8 - 12a + b = 6 \\ -1 - 3a + b = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 9a = 6 \\ -1 - 3a + b = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow a = \frac{1}{3}, b = 2
 \end{aligned}$$

であり, これは $0 < a \leq \frac{2}{3}$ を満たす。

[2] $\frac{2}{3} < a < 1$ のとき

$(8 - 12a + b) - b < 0$ であるから, $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最大値は b である。よって, 条件より,

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} b = 6 \\ -1 - 3a + b = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow a = \frac{5}{3}, b = 6
 \end{aligned}$$

であり, これは $\frac{2}{3} < a < 1$ を満たさないため不適である。

以上[1], [2]より, $a = \frac{1}{3}, b = 2$ であり, $\frac{b}{a} = 6$ である。

〔解答〕

⊕

〔解説〕

$t = \sin x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \cos x$ であり,

x	0	→	$\frac{\pi}{2}$
t	0	→	1

である。したがって,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x (1 + \sin x)}{2 + \sin x} dx \\
 &= \int_0^1 \frac{1+t}{2+t} dt \\
 &= \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt \\
 &= 1 - [\log|2+t|]_0^1 \\
 &= 1 - \log \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 \frac{6e^S}{e} &= 6e^{S-1} \\
 &= 6e^{-\log \frac{3}{2}} \\
 &= 6 \cdot \frac{2}{3} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

である。

問題 16 ~ 18

〔解答〕

16	⊖
17	⊕
18	⊖

〔解説〕

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \sin x < 1, 0 < \cos x < 1$ であるから,

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sin x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x$$

より, 両辺を 2 乗して,

$$(\cos x + \sin x)^2 = 8 \cos^2 x \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x \cos x - 1)(4 \sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad (\because \sin x \cos x > 0)$$

であり,

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \cos x \sin x = \sqrt{2}$$

となる。したがって,

$$2\sqrt{2} \cos x \sin x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

である。

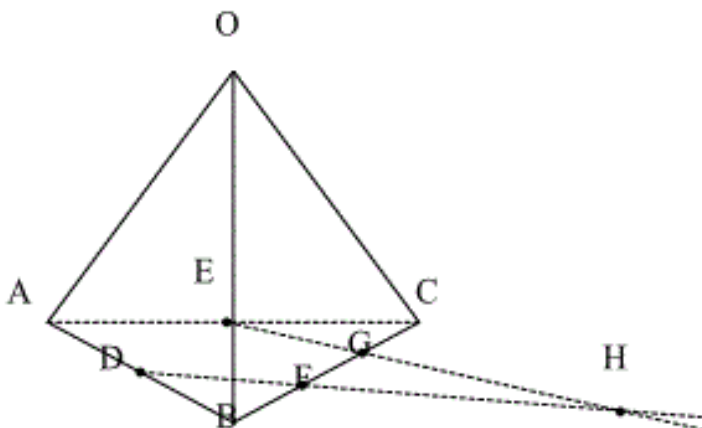
問題 19～22

〔解答〕

19	カ
20	ア
21	ク
22	ア

〔解説〕

問題文の状況を図示すると下のようになる。



$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}, \overrightarrow{OF} = \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{3}$ となるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \\ &= \frac{-3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{6}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OE} \\ &= \frac{\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{3} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ &= \frac{-3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{6}\end{aligned}$$

である。また、点 H は DF, EG 上の点であるから、実数 α, β を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OD} + \alpha \overrightarrow{DF} \\ \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OE} + \beta \overrightarrow{EG}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は 1 次独立であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} + \alpha \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OE} + \beta \overrightarrow{EG} \\ \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \alpha \frac{-3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}}{6} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} + \beta \frac{-3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{6} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\alpha = \frac{1}{3}\beta \\ \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\beta \end{cases} \\ \therefore \alpha &= \beta = 3 \end{aligned}$$

とわかる。よって、 $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ を得る。したがって、

$$p^2 + q^2 + r^2 = (-1)^2 + (1)^2 + (1)^2 = 3$$

である。さらに、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} &= (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= -|\overrightarrow{OA}|^2 + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= -4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 60^\circ \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。

問題 2 3 ～ 2 5

〔解答〕

23	⊖
24	⊕
25	⊗

〔解説〕

$$S_n=\sum_{l=1}^n(-1)^{l+1}l^2 \text{ とおく。}$$

[1] n が奇数のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}}(2l-1)^2 - \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}(2l)^2 \\ &= 4\sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}}l^2 - 4\sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}}l + \sum_{l=1}^{\frac{n+1}{2}}1 - 4\sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}l^2 \\ &= 4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{2}+1\right) + \frac{n+1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

となる。

[2] n が偶数のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}}(2l-1)^2 - \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}}(2l)^2 \\ &= \sum_{l=1}^{\frac{n}{2}}(1-4l) \\ &= -4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) + \frac{n}{2} \\ &= -\frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より, $S_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1)$ となる。よって,

$$S_6=\frac{(-1)^7}{2}\cdot6\cdot7=-21$$

である。また,

$$\frac{S_{101}}{1717}=\frac{\frac{(-1)^{102}}{2}\cdot101\cdot102}{1717}=3$$

である。さらに,

$$\begin{aligned} a_n+2S_n &= (-1)^{n+1}n^2+(-1)^{n+1}n(n+1) \\ &= (-1)^{n+1}n(2n+1) \end{aligned}$$

となる。また, 4656 を素因数分解すると $4656=2^4\cdot3\cdot97$ となることから,

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1}k(2k+1) &= -2^4\cdot3\cdot97 \\ \Leftrightarrow k &= 48 \end{aligned}$$

を得る。

〔別解〕

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_n+a_{2n+1}+a_{2n+2} \\ &= S_n+(2n+1)^2-(2n+2)^2 \\ &= S_n-4n-3 \end{aligned}$$

であるから, $S_0=0$ に注意すると,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= S_0+\sum_{k=0}^{n-1}(S_{2k+2}-S_{2k}) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}(4k+3) \\ &= -2n(n-1)-3n \\ &= -2n^2-n \end{aligned}$$

となる。また, $n=0$ のとき, $S_0=-2\cdot0^2-0=0$ となり, $S_{2n}=-2n^2-n$ は $n=0$ でも成立する。

また,

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= S_{2n}+a_{2n+1} \\ &= -2n^2-n+(2n+1)^2 \\ &= 2n^2+3n+1 \\ &= (2n+1)(n+1) \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} S_6 &= -2\cdot3^2-3 \\ &= -21 \\ \frac{S_{101}}{1717} &= \frac{101\cdot51}{101\cdot17} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。ここで, $a_{2n+1}+2S_{2n+1}>0$ より, $a_k+2S_k=-4656$ を満たす k は奇数ではない。よって,

$$\begin{aligned} 4656 &= 2^4\cdot3\cdot97 \\ a_{2n}+2S_{2n} &= -4n^2-4n^2-2n \\ &= -2n(4n+1) \end{aligned}$$

より,

$$n(4n+1)=2^3\cdot3\cdot97\qquad\cdots(*)$$

となる。さらに, $4n+1$ が奇数であることから,

$$\begin{aligned} 4n+1 &= 97, 97\cdot3 \\ \therefore n &= 24, \frac{145}{2} \end{aligned}$$

である。したがって, n は整数であるから, $n=24$ となる。このとき,

$$\begin{aligned} 24\cdot(4\cdot24+1) &= 24\cdot97 \\ &= 2^3\cdot3\cdot97 \end{aligned}$$

となり, $(*)$ は成立する。よって,

$$k=2n=48$$

となる。