

1)

$$f(x) = x^3 - 14x^2 + 49x \text{ より,}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 28x + 49$$

$$= (3x - 7)(x - 7)$$

であるから,

$$f'(x) = 0$$

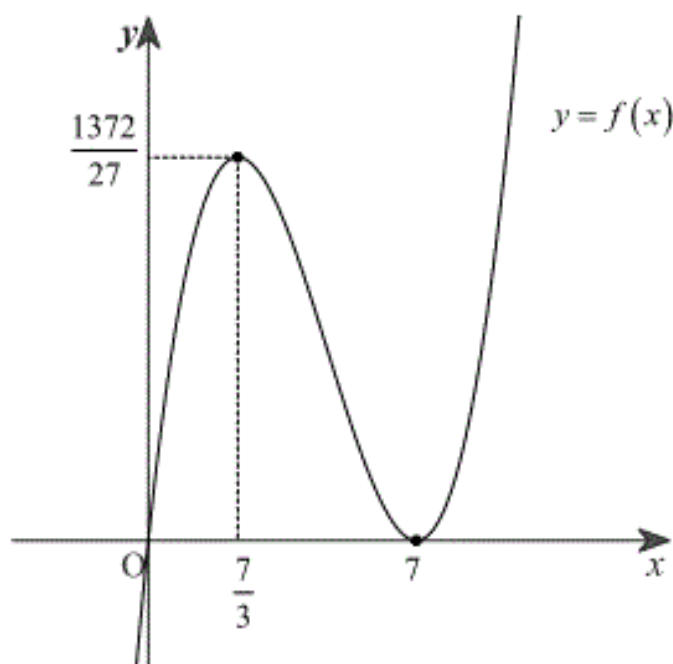
$$\Leftrightarrow (3x - 7)(x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{3}, 7$$

となる。よって、 $y = f(x)$ の増減表は以下の通りである。

x	$\cdots$	$\frac{7}{3}$	$\cdots$	7	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1372}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって、 $y = f(x)$ のグラフの概形は以下の通りである。



(答) 第1次導関数: $f'(x) = 3x^2 - 28x + 49$, 増減表: 前表, 概形: 前図

2)

$f(x) - g_n(x)$ は,

$$f(x) - g_n(x) = x \left(x^2 - 14x + 49 - \frac{1}{n+3} \right)$$

と整理できる。ここで、 $x^2 - 14x + 49 - \frac{1}{n+3} = 0$ に $x=0$ を代入すると、 $49 - \frac{1}{n+3}$ となるが、 n は自然数であることより、

$$49 - \frac{1}{n+3} > 49 - \frac{1}{3} = \frac{146}{3}$$

が得られ、 $49 - \frac{1}{n+3} \neq 0$ である。よって、 $x^2 - 14x + 49 - \frac{1}{n+3} = 0$ は $x=0$ を解にもたない。ま

た、 $x^2 - 14x + 49 - \frac{1}{n+3} = 0$ の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = 7^2 - \left(49 - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{n+3} > 0$$

より、 $x^2 - 14x + 49 - \frac{1}{n+3} = 0$ は異なる2つの実数解をもつ。したがって、 $f(x) - g_n(x) = 0$ は $x=0$ 以外に異なる2つの実数解をもつことが証明された。

(証明終)

また、 $x = a_n, b_n$ ($a_n > b_n$) は $x^2 - 14x + 49 - \frac{1}{n+3} = 0$ の2つの実数解であり、

$$x^2 - 14x + 49 - \frac{1}{n+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7)^2 = \frac{1}{n+3}$$

$$\therefore x = 7 \pm \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

であるから、 $a_n = 7 + \frac{1}{\sqrt{n+3}}, b_n = 7 - \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ である。

$$(答) \quad a_n = 7 + \frac{1}{\sqrt{n+3}}, b_n = 7 - \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

3)

a_1, b_1 をそれぞれ計算すると、

$$a_1 = 7 + \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{15}{2}$$

$$b_1 = 7 - \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{13}{2}$$

である。

$$(答) \quad a_1 = \frac{15}{2}, b_1 = \frac{13}{2}$$

また、

$$b_{n+1} - b_n = \left(7 - \frac{1}{\sqrt{n+4}} \right) - \left(7 - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{(n+3)(n+4)}}$$

$$> 0$$

$$a_n - a_{n+1} = \left(7 + \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right) - \left(7 + \frac{1}{\sqrt{n+4}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{(n+3)(n+4)}}$$

$$> 0$$

が成り立つ。したがって、 $b_{n+1} > b_n, a_n > a_{n+1}$ となる。

(証明終)

4)

2)より、

$$f(x) - g_n(x) = 0 \Leftrightarrow x(x - a_n)(x - b_n) = 0$$

である。ここで、数列 $\{c_n\}$ は、 $c_n > 0$ を満たすから、

$$f(c_n) - g_n(c_n) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow c_n(c_n - a_n)(c_n - b_n) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (c_n - a_n)(c_n - b_n) \leq 0 \quad (\because c_n > 0)$$

$$\Leftrightarrow b_n \leq c_n \leq a_n \quad (\because a_n > b_n)$$

が得られる。また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 + \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right) = 7$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right) = 7$$

であるから、はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ は収束し、その極限値は $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 7$ である。

$$(答) \quad \text{大小関係: } b_n \leq c_n \leq a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n: \text{収束, 極限値: } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 7$$