

1)

$\overline{A_1B_1} = \vec{b}$, $\overline{A_1C_1} = \vec{c}$, $\overline{A_1D_1} = \vec{d}$ とする。正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ の1辺の長さは1であり、各辺のなす角はどの2辺についても 60° であるから

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、点 A_2, B_2, C_2, D_2 の定義より

$$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}), \overline{A_1B_2} = \frac{1}{3}(\vec{c} + \vec{d}), \overline{A_1C_2} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{d}), \overline{A_1D_2} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2} \cdot \overline{B_1A_2} &= \overline{A_1A_2} \cdot (\overline{A_1A_2} - \overline{A_1B_1}) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot \frac{1}{3}(-2\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \\ &= \frac{1}{9}(-2|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{d} + 2\vec{c} \cdot \vec{d}) \\ &= \frac{1}{9}\left(-2 + 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。また、同様に計算して

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{C_1A_2} = \overline{A_1A_2} \cdot \overline{D_1A_2} = 0$$

となる。よって

$$\angle A_1A_2B_1 = \angle A_1A_2C_1 = \angle A_1A_2D_1 = 90^\circ$$

とわかる。

(証明終)

$$\begin{aligned} |\overline{A_1A_2}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}|^2 \\ &= \frac{1}{9}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2\vec{c} \cdot \vec{d}) \\ &= \frac{1}{9}(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

であるから

$$A_1A_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because A_1A_2 > 0)$$

となる。ここで、 $\angle A_1A_2B_1 = \angle A_1A_2C_1 = \angle A_1A_2D_1 = 90^\circ$ より、線分 A_1A_2 は $\triangle B_1C_1D_1$ に垂直であるから、正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ の体積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \triangle B_1C_1D_1 \cdot A_1A_2 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

と求められる。

$$\text{(答) 線分 } A_1A_2 \text{ の長さ: } \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 正四面体 } A_1B_1C_1D_1 \text{ の体積: } \frac{\sqrt{2}}{12}$$

2)

1)より

$$\begin{aligned} \overline{A_2B_2} &= \overline{A_1B_2} - \overline{A_1A_2} \\ &= -\frac{1}{3}\vec{b} \\ &= -\frac{1}{3}\overline{A_1B_1} \end{aligned}$$

となるから、 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ である。

(証明終)

また、この式から

$$A_2B_2 = \frac{1}{3} \cdot A_1B_1 = \frac{1}{3}$$

となることがわかる。

$$\text{(答) } \frac{1}{3}$$

3)

2)と同様に計算すると

$$\begin{aligned} \overline{A_2C_2} &= -\frac{1}{3}\overline{A_1C_1}, \overline{A_2D_2} = -\frac{1}{3}\overline{A_1D_1}, \overline{B_2C_2} = -\frac{1}{3}\overline{B_1C_1} \\ \overline{B_2D_2} &= -\frac{1}{3}\overline{B_1D_1}, \overline{C_2D_2} = -\frac{1}{3}\overline{C_1D_1} \end{aligned}$$

となるから、図形の対称性より A_2, B_2, C_2, D_2 を頂点とする立体は1辺の長さが $\frac{1}{3}$ の正四面体となる。

(証明終)

4)

数学的帰納法を利用して、 $k \geq 1$ について A_k, B_k, C_k, D_k を頂点とする立体が正四面体となることを示す。

[1] $k=1$ のとき

条件より、四面体 $A_1B_1C_1D_1$ は正四面体である。

[2] $k=i$ (i は自然数) のとき

A_i, B_i, C_i, D_i を頂点とする立体が正四面体となると仮定すると、2), 3)と同様の計算により

$$\begin{aligned} \overline{A_{i+1}B_{i+1}} &= -\frac{1}{3}\overline{A_iB_i}, \overline{A_{i+1}C_{i+1}} = -\frac{1}{3}\overline{A_iC_i}, \overline{A_{i+1}D_{i+1}} = -\frac{1}{3}\overline{A_iD_i}, \\ \overline{B_{i+1}C_{i+1}} &= -\frac{1}{3}\overline{B_iC_i}, \overline{B_{i+1}D_{i+1}} = -\frac{1}{3}\overline{B_iD_i}, \overline{C_{i+1}D_{i+1}} = -\frac{1}{3}\overline{C_iD_i} \end{aligned}$$

となる。よって、 $A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1}$ を頂点とする立体も正四面体となる。

以上、[1], [2]より、 A_k, B_k, C_k, D_k を頂点とする立体は正四面体となる。

(証明終)

5)

4)より、正四面体 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$ と正四面体 $A_nB_nC_nD_n$ の相似比は3:1であるから、体積比は27:1である。したがって、これを繰り返し用いることにより

$$V_n = \left(\frac{1}{27}\right)^{n-1} V_1$$

となる。 $V_n \leq \frac{V_1}{10^{100}}$ の両辺はともに正であるから、両辺の常用対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{10} V_n &\leq \log_{10} \frac{V_1}{10^{100}} \\ \Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{3(n-1)} + \log_{10} V_1 &\leq \log_{10} V_1 - 100 \\ \Leftrightarrow -3(n-1)\log_{10} 3 &\leq -100 \\ \Leftrightarrow 3(n-1) \cdot 0.4771 &\geq 100 \\ \Leftrightarrow n-1 &\geq 69.8\cdots \\ \Leftrightarrow n &\geq 70.8\cdots \end{aligned}$$

となる。したがって、 $V_n \leq \frac{V_1}{10^{100}}$ となるとき n の最小値は71である。

(答) 71

6)

5)より、 $\{V_n\}$ は初項 V_1 、公比 $\frac{1}{27}$ の等比数列となるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n V_i \\ &= V_1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{27}\right)^n}{1 - \frac{1}{27}} \\ &= \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{27^n}\right) V_1 \end{aligned}$$

である。また、これを用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{V_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{27^n}\right) = \frac{27}{26}$$

となる。

$$\text{(答) } S_n = \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{27^n}\right) V_1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{V_1} = \frac{27}{26}$$