

1)

曲線 C_2 において $y' = -\frac{1}{x^2}$ より点 P における接線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{p^2}(x-p) + \frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}$$

となる。曲線 C_1 において $y' = 2ax$ より点 Q における接線の方程式は、

$$y = 2aq(x-q) + aq^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2aqx - aq^2$$

となる。この2直線が一致することから、

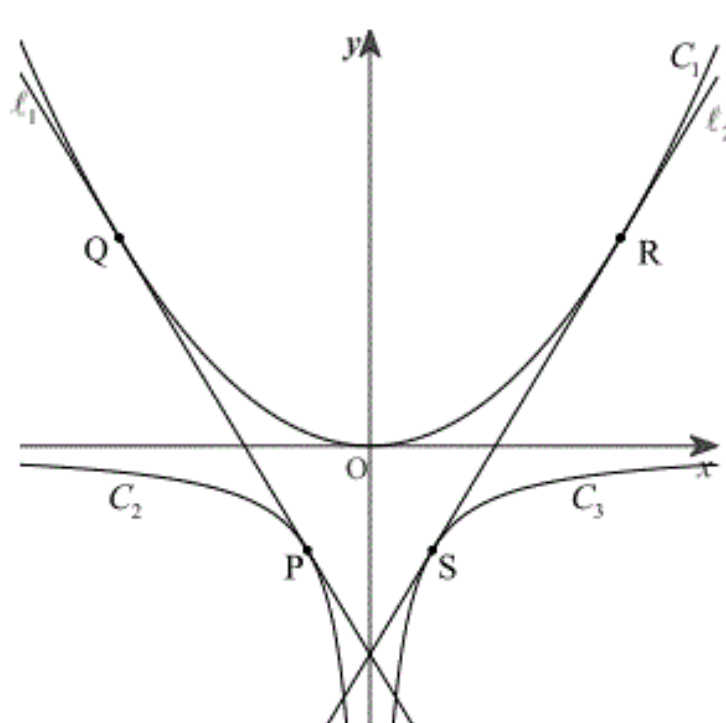
$$\begin{cases} -\frac{1}{p^2} = 2aq \\ \frac{2}{p} = -aq^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2ap^2} \\ -\frac{1}{4ap^4} = \frac{2}{p} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2ap^2} \\ -\frac{1}{8a} = p^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{2\sqrt[3]{a}} \\ q = -\frac{2}{\sqrt[3]{a}} \end{cases}$$

と求めることができる。



ここで、曲線 C_3 と曲線 C_2 は y 軸に関して対称な関係であり、曲線 C_1 は y 軸に関して対称であるから、直線 ℓ_1 を y 軸に関して対称移動した直線は曲線 C_1 , C_3 の両方と接し、点 R, S はそれぞれ点 Q, P を y 軸に関して対称移動した点となる。よって、

$$r = -q = \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$$

$$s = -p = \frac{1}{2\sqrt[3]{a}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p = -\frac{1}{2\sqrt[3]{a}}, q = -\frac{2}{\sqrt[3]{a}}, r = \frac{2}{\sqrt[3]{a}}, s = \frac{1}{2\sqrt[3]{a}}$$

2)

直線 ℓ_1 の方程式は 1) より

$$y = 2aqx - aq^2$$

$$\Leftrightarrow y = -4\sqrt[3]{a^2}x - 4\sqrt[3]{a}$$

である。直線 ℓ_2 は直線 ℓ_1 を y 軸に関して対称移動した直線であるから、直線 ℓ_2 の方程式は

$$y = 4\sqrt[3]{a^2}x - 4\sqrt[3]{a}$$

となる。よって、直線 ℓ_1 、直線 ℓ_2 の交点 A の座標は $(0, -4\sqrt[3]{a})$ であり、点 A は y 軸上に存在する。

$$(\text{答}) \quad \text{証明は前述、点 A の } y \text{ 座標は } -4\sqrt[3]{a}$$

3)

1) より y 軸は線分 QR の垂直二等分線であり、点 R の座標は $(\frac{2}{\sqrt[3]{a}}, 4\sqrt[3]{a})$ である。直線 QR と y 軸の交点を T とすると、 $\triangle AQR$ の面積は、

$$\begin{aligned} \triangle AQR &= \frac{1}{2} \cdot QR \cdot TA \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{a}}\right) \cdot \{4\sqrt[3]{a} - (-4\sqrt[3]{a})\} \\ &= 16 \end{aligned}$$

となる。また、これは a の値に関わらず一定である。

$$(\text{答}) \quad \text{証明は前述、} \triangle AQR \text{ の面積は } 16$$

4)

直線 QR は x 軸に平行であり、2) より直線 ℓ_2 の傾きは $4\sqrt[3]{a^2}$ であるから、 $\triangle AQR$ が正三角形となるとき

$$4\sqrt[3]{a^2} = \tan 60^\circ$$

が成り立つ。よって、

$$4\sqrt[3]{a^2} = \tan 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

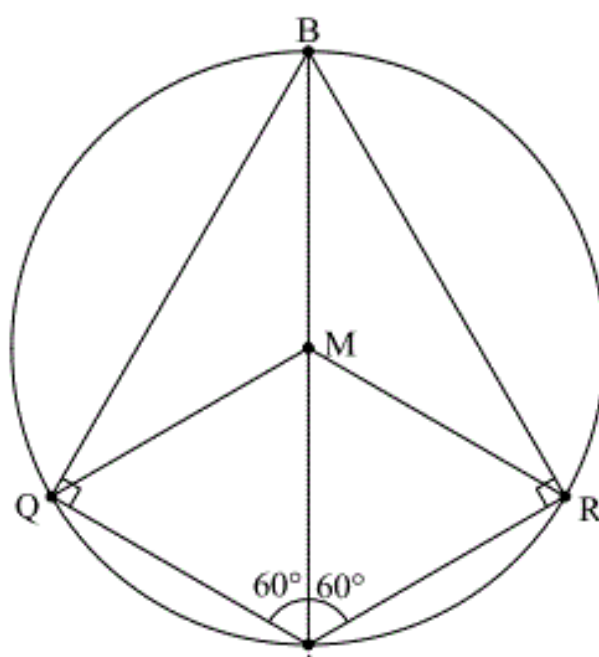
$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt[3]{27}}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt[3]{27}}{8}$$

5)

直線 ℓ_3 は点 Q における法線より $\angle AQB = 90^\circ$ であり、直線 ℓ_4 は点 R における法線より $\angle ARB = 90^\circ$ であるから、4 点 A, Q, B, R は点 M を中心とする同一円周上に存在する。



また、辺 AB が共通であり、1) より $AQ = AR$ であるから、 $\triangle AQB \cong \triangle ARB$ が成り立つ。これと $\angle QAR = 120^\circ$ より、 $\angle QAM = \angle RAM = 60^\circ$ となる。よって、 $\angle QBA = \angle RBA = 30^\circ$ より、円周角の定理から $\angle QMA = \angle RMA = 60^\circ$ が成り立つ。以上より、 $\angle AQM = \angle MAQ = \angle QMA = 60^\circ$ であるから、 $\triangle QMA$ は正三角形であることがわかる。また、 $\angle RMA = \angle MAQ$ より錯角が等しいから $MR \parallel QA$ である。等積変形より $\triangle QMA$ の面積は $\triangle AQR$ の面積と等しく、3) より $\triangle QMA$ の面積は 16 となる。

$$(\text{答}) \quad \triangle QMA \text{ は正三角形、面積は } 16$$