

1)

直線 ℓ_1 の方程式 $x+y=9 \Leftrightarrow y=9-x$ を円 C の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}(x-7)^2 + (y-7)^2 &= 17 \\ \Leftrightarrow (x-7)^2 + (9-x-7)^2 &= 17 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 18x + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x-6) &= 0 \\ \therefore x &= 3, 6\end{aligned}$$

となる。これらをそれぞれ直線 ℓ_1 の方程式に代入すると、交点の座標は $(3, 6), (6, 3)$ となる。この2点と点Aとの距離はそれぞれ、

$$\text{点}(3, 6): \sqrt{(3-1)^2 + (6-8)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{点}(6, 3): \sqrt{(6-1)^2 + (3-8)^2} = 5\sqrt{2}$$

である。したがって、 $Q(3, 6), R(6, 3)$ となり、

$$AQ = 2\sqrt{2}, AR = 5\sqrt{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad Q(3, 6), R(6, 3), AQ = 2\sqrt{2}, AR = 5\sqrt{2}$$

2)

円 C は $B(7, 7)$ を中心とする半径 $\sqrt{17}$ の円であるから、直線 ℓ_2 と円 C が異なる2つの点で交

わるための条件は、直線 ℓ_2 と点 B との距離が $\sqrt{17}$ 未満となることである。したがって、点と直線の距離の公式より

$$\begin{aligned}\frac{|m \cdot 7 - 7 - m + 8|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} &< \sqrt{17} \\ \Leftrightarrow |6m + 1| &< \sqrt{17(m^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow |6m + 1|^2 &< 17(m^2 + 1) \quad (\because \text{両辺} \geq 0 \text{ 以上}) \\ \Leftrightarrow 19m^2 + 12m - 16 &< 0 \\ \Leftrightarrow \left(m - \frac{-6 - 2\sqrt{85}}{19}\right) \left(m - \frac{-6 + 2\sqrt{85}}{19}\right) &< 0 \\ \therefore \frac{-6 - 2\sqrt{85}}{19} &< m < \frac{-6 + 2\sqrt{85}}{19}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $m > -1 > \frac{-6 - 2\sqrt{85}}{19}$ であるから、求める m の値の範囲は

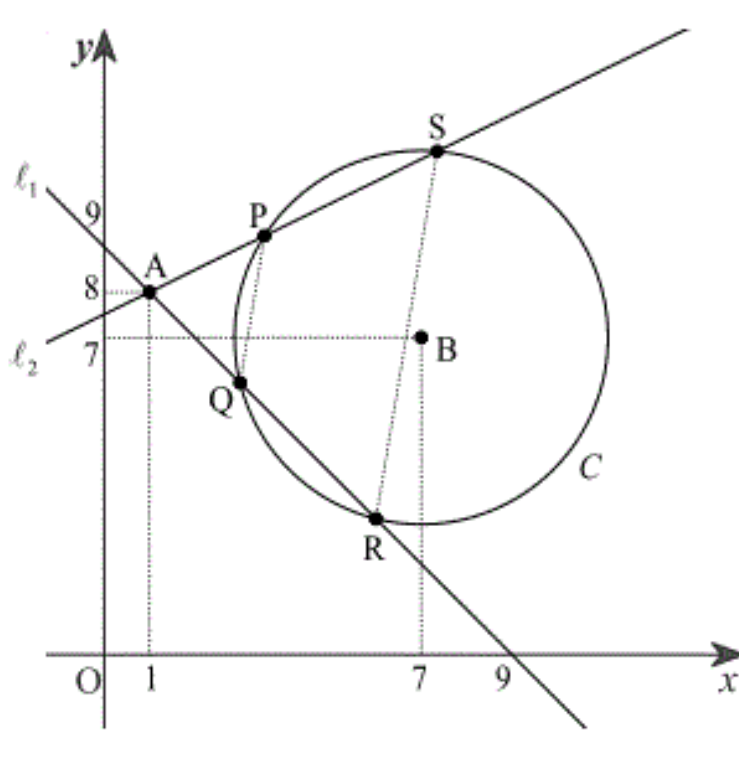
$$-1 < m < \frac{-6 + 2\sqrt{85}}{19}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -1 < m < \frac{-6 + 2\sqrt{85}}{19}$$

3)

与えられた条件を図示すると、次のようになる。



$PQ \parallel SR$ より、 $\triangle APQ$ と $\triangle ASR$ について、

$$\begin{aligned}\angle PAQ &= \angle SAR \\ \angle APQ &= \angle ASR \quad (\text{同位角})\end{aligned}$$

であるから、二角相等より $\triangle APQ$ と $\triangle ASR$ は相似である。したがって、1)より

$$AP : AS = AQ : AR = 2 : 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、方べきの定理より

$$AP \cdot AS = AQ \cdot AR$$

となるから、これと $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned}AP \cdot \frac{5}{2} AP &= AQ \cdot \frac{5}{2} AQ \\ \Leftrightarrow AP^2 &= AQ^2 \\ \Leftrightarrow AP &= AQ \quad (\because AP \geq 0, AQ \geq 0)\end{aligned}$$

であり、

$$AR = \frac{5}{2} AQ = \frac{5}{2} AP = AS$$

である。よって、 $AP = AQ, AR = AS$ であることが示された。また、 $\triangle ABR$ と $\triangle ABS$ について、

$$\begin{aligned}AR &= AS \\ BR &= BS (= \sqrt{17})\end{aligned}$$

および、 AB は共通の辺であることから、三辺相等より $\triangle ABR$ と $\triangle ABS$ は合同である。したがって、 $\angle BAR = \angle BAS$ であるから、直線 AB は $\angle SAR$ の二等分線である。

(証明終)

4)

線分 PS の中点を M とすると、 $\triangle BPS$ は $BP = BS$ の二等辺三角形であるから、 $PS \perp BM$ である。また、1), 3)より

$$\begin{aligned}PS &= AS - AP \\ &= AR - AQ \\ &= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

であるから、 $PM = \frac{PS}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ である。ここで、線分 BM の長さは直線 ℓ_2 と点 B との距離に等しいため、

$$\begin{aligned}PM &= \sqrt{PB^2 - BM^2} \\ \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2} &= \sqrt{(\sqrt{17})^2 - \left(\frac{|m \cdot 7 - 7 - m + 8|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2} &= 17 - \frac{(6m + 1)^2}{m^2 + 1} \quad (\because \text{両辺} \geq 0 \text{ 以上}) \\ \Leftrightarrow 47m^2 + 24m - 23 &= 0 \\ \Leftrightarrow (47m - 23)(m + 1) &= 0 \\ \therefore m &= \frac{23}{47} \quad (\because m > -1)\end{aligned}$$

となる。これは2)で求めた範囲に含まれる。

$$(\text{答}) \quad m = \frac{23}{47}$$

5)

四角形 $PQRS$ の面積を S 、 $\triangle APQ$ の面積を S_1 、 $\triangle ASR$ の面積を S_2 とすると、3)より $\triangle APQ$ と $\triangle ASR$ は相似であるから、

$$\begin{aligned}S_2 &= \left(\frac{AR}{AQ}\right)^2 S_1 \\ &= \left(\frac{5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 S_1 \\ &= \frac{25}{4} S_1\end{aligned}$$

である。ここで、 $\theta = \angle SAR$ とし、直線 ℓ_1, ℓ_2 が x 軸の正方向となす角をそれぞれ α, β とする。ただし、 $0 < \theta < \pi, -\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき、4)より

$$\tan \alpha = -1, \tan \beta = m = \frac{23}{47}$$

であるから、図より

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{23}{47} + 1}{1 - \frac{23}{47}} \\ &= \frac{35}{12}\end{aligned}$$

である。これと $0 < \theta < \pi$ より、

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{35}{12}\right)^2}} \\ &= \frac{35}{37}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}S &= S_2 - S_1 \\ &= \frac{25}{4} S_1 - S_1 \\ &= \frac{21}{4} S_1 \\ &= \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin \theta \\ &= \frac{21}{8} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{35}{37} \\ &= \frac{735}{37}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{735}{37}$$