

(1996 年度)

5 数 学 問 題

(この問題冊子は 7 ページ， 4 問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が，次の 2， 3 ページにある。試験開始 3 分前に監督の指示があるので，それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 筆記具は、HBの黒鉛筆に限る。
万年筆・ボールペン・シャープペンシルなどを使用してはいけない。時計に組込まれたアラーム機能、計算機能、辞典機能などを使用してはいけない。
3. 試験開始の合図があったら、ただちに解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。
4. 次に解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
5. 次に、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をHBの黒鉛筆でぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 写真照合のため、自分の受験番号を呼ばれたら顔を上げること。
11. 試験時間中に退場することはできない。
12. 問題冊子、解答用紙、計算用紙を持ち帰ってはならない。
13. 解答用紙（マーク式）の最下段の①の欄には記入しないこと。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各桁の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの桁の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみーにマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表示するときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各桁の欄とも*にマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、ーにはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 桁											1 の 桁										
-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 桁											1 の 桁										
-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を, $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

問題 **1** の解答は、解答用紙 A (マーク用解答用紙の上に添付された白紙の解答用紙) に記せ。問題 **2** ~ **4** の解答は、マーク用解答用紙にマークで記せ。
なお π は円周率である。

1 xyz 空間内の直線 l は点 $P(0, 3, 4)$ を通り、点 $C(0, 2, 1)$ を中心とする半径 1 の球に接しながら動く。直線 l と xy 平面との交点を $Q(x, y)$ とする。

(1) O を原点とすると、直線 l 上の点 S は $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + t \overrightarrow{PQ}$ とパラメータ表示できる。 l と球の交点が満たす t の条件を求め、次に l が球と一点でしか交わらないことを利用して $Q(x, y)$ の軌跡を x と y の式で表わせ。またこの軌跡で囲まれる部分の面積を求めよ。

(2) $\triangle PCQ$ が動いてできる立体図形の体積を求めよ。

2 $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ を各々 0 次, 1 次, 2 次の多項式とし, 次の条件が満たされているとする。

(条件 1) $n = 0, 1, 2$ に対して次の式が成り立つ。

$$\int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

(条件 2) $m, n = 0, 1, 2$ に対して, もしも $m \neq n$ ならば次の式が成り立つ。

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$$

(1) このとき $P_1(x) = \boxed{\text{ア}}$ $x + \boxed{\text{イ}}$

$$P_2(x) = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} x^2 + \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} x + \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。ただし, 最高次の係数は正数とする。

(2) C_1, C_2, A, B を定数とし, $n = 1, 2$ に対して

$$P_n(x) = C_n \frac{d^n}{dx^n} ((x+A)^n (x+B)^n)$$

が成り立っているとする。 $A > B$ とすると $A = \boxed{\text{ケ}}$, $B = \boxed{\text{コ}}$ である。

3 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

とおく。

(1) 次の等式が成り立つ。

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = f(x).$$

$$\boxed{\text{サ}} f(x)^2 + \boxed{\text{シ}} g(x)^2 = 1$$

(2) A を実数とする。方程式

$$2f(x) - 3g(x) = A$$

が正数解 x を持つための必要十分条件は $A < \boxed{\text{ス}}$ が成り立つことである。

(3) xy 平面において $y = f(x)$ のグラフを C とおく。 a を正数とし、 $(a, f(a))$ で表わされる C 上の点を P 、 P における C の接線 l が x 軸と交わる点を Q 、 P を通り l に直交する直線が x 軸と交わる点を R とおく。

三角形 PQR の面積は

$$a = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \log \boxed{\text{タ}}$$

のとき最小となり、その最小値は

$$\frac{\boxed{\text{チ}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

4

袋の中に何も書かれていない3枚のカードが入っている。無作為に1枚のカードを取り出し、そのカードに丸印をひとつ書き加え、再び袋にもどす、という操作を、袋の中のすべてのカードに1個以上の丸印がつけられるまでくり返す。このとき、 k 回目の操作で終了する確率を P_k とする。

$$(1) \quad P_3 = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}, \quad P_4 = \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \text{ であり、一般に}$$

$$P_k = \frac{2^{k-1} - \boxed{\text{ネ}}_{k-1}}{\boxed{\text{ノ}}} \text{ である。}$$

(2) この操作が $k+1$ 回以上続く確率を Q_k とすれば

$$Q_k = \frac{2^k - \boxed{\text{ハ}}_{k-1}}{\boxed{\text{ヒ}}} \text{ である}$$

(3) k 回目の操作の後、まだ丸印のついていないカードがあることがわかった。このとき、つぎの操作、つまり $k+1$ 回目の操作で終了する確率は

$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}^k - 1} \right)$$

である。