

(1996 年度)

7 数 学 問 題

(この問題冊子は 5 ページ, 3 問である。)

「受験についての注意」が次ページにある。試験開始 3 分前に監督の指示があるので、それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、問題冊子を開いてはならない。
2. 筆記具は、HBの黒鉛筆に限る。
万年筆・ボールペン・シャープペンシルなどを使用してはいけない。時計に組込まれたアラーム機能、計算機能、辞典機能などを使用してはいけない。
3. 試験開始の合図があったら、ただちに解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。
4. 次に解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
5. 次に、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 各問題に対する解答は、その問題番号が記された解答用紙に記入すること。
足りない場合は、その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には、何も書いてはいけない。
7. 解答用紙を、切り離してはいけない。採点が不可能になる。
8. 写真照合のため、自分の受験番号を呼ばれたら顔を上げること。
9. 試験時間中に退場することはできない。
10. 問題冊子、解答用紙、計算用紙を持ち帰ってはならない。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

1 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対して $\text{tr}(X) = x + w$ とおく。 A, B を 2 次正方行列とする。

(1) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ となることを示せ。

(2) $\text{tr}(A) = 0$ かつ $\text{tr}(A^2) = 0$ ならば $A^2 = O$ (零行列) となることを示せ。

(3) $A = AB - BA$ ならば $A^2 = O$ となることを示せ。

2 $r(\theta)$ を θ の関数とする。ただし定義域は $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。 xyz 空間の 2 点 $(1, 0, 0)$ と $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta, 1)$ を結ぶ線分を z 軸のまわりに 1 回転してできる曲面を S とする。 $z = 0, z = 1$ の 2 平面と S で囲まれた部分の体積を $V(\theta)$ とおく。

(1) $V(\theta)$ を $r(\theta)$ と θ で表わせ。

(2) $r(\theta) = \sin \theta$ であるとき、 $V(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) $r(\theta) = \theta$ であるとき、 $\frac{d}{d\theta} V(\theta) > 0$ を示せ。

3 $0 < a < 1$ に対して単位円上の点 P_n を

$$P_n = (\cos(na\pi), \sin(na\pi)), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。

(1) ある自然数 m に対して $P_m = (1, 0)$ となる必要十分条件は、
 $a = \text{有理数}$ であることを示せ。

(2) $P_m = (1, 0)$ となる最小の m を m_0 とする。 $a = \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}$ の場合
の m_0 の値を各々求めよ。

(3) 一般に $a = \frac{p}{q}$ (p と q は互いに素な自然数) のとき、 m_0 はどうなるか。
このとき、 $P_1, P_2, \dots, P_{m_0}$ は異なる点であることを示せ。

(4) a を有理数とし、 P_i と P_j を隣り合う単位円上の点とすれば、
中心角 $\angle P_i O P_j = \frac{2\pi}{m_0}$
であることを示せ。つまり等間隔で並んでいることを示せ。