

(1997 年度)

6 数 学 問 題

(この問題冊子は 7 ページ，4 問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が，次の 2，3 ページにある。試験開始 3 分前に監督の指示があるので，それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 筆記具は、HBの黒鉛筆に限る。
万年筆・ボールペン・シャープペンシルなどを使用してはいけない。時計に組込まれたアラーム機能、計算機能、辞典機能などを使用してはいけない。
3. 試験開始の合図があったら、ただちに解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。
4. 次に解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
5. 次に、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をHBの黒鉛筆でぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 写真照合のため、自分の受験番号を呼ばれたら顔を上げること。
11. 試験時間中に退場することはできない。
12. 問題冊子、解答用紙、計算用紙を持ち帰ってはならない。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄とも*にマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

$\boxed{1}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

とする。ただし、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列である。

(1) $A = \alpha P + \beta Q$ が成り立つとき、 α 、 β 、 x 、 y の値はそれぞれ

$$\alpha = \boxed{\text{ア}}, \quad \beta = \boxed{\text{イ}}, \quad x = \boxed{\text{ウ}}, \quad y = \boxed{\text{エ}}$$

である。また、次が成り立つ。

$$P^2 = \boxed{\text{オ}} P + \boxed{\text{カ}} E, \quad Q^2 = \boxed{\text{キ}} Q + \boxed{\text{ク}} E$$

$$PQ = QP = \boxed{\text{ケ}} E, \quad P + Q = \boxed{\text{コ}} E$$

(2)

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b^n & a - b^n \\ a - b^n & a + b^n \end{pmatrix}$$

とすると、 $a = \boxed{\text{サ}}$ 、 $b = \boxed{\text{シ}}$ である。

(3)

$$E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} tn + u - v^n & tn - u + v^n \\ tn - u + v^n & tn + u - v^n \end{pmatrix}$$

とすると、

$$s = \boxed{\text{ス}}, \quad t = \boxed{\text{セ}}, \quad u = \boxed{\text{ソ}}, \quad v = \boxed{\text{タ}}$$

である。

2 $y^2 = x^3 - 36x$ で表される曲線は、 x 軸に関して対称で、 $\boxed{\text{チ}} \leq x \leq \boxed{\text{ツ}}$ の範囲、または、 $\boxed{\text{テ}} \leq x$ の範囲に存在する。 $\boxed{\text{チ}} \leq x \leq \boxed{\text{ツ}}$ の範囲の曲線で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を $2^p \cdot 3^q \pi$ とすれば、 $p = \boxed{\text{ト}}$ 、 $q = \boxed{\text{ナ}}$ である。

この曲線の点 $(-2, 8)$ での接線の傾きは $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ となり、この接線が再び曲線

と交わる点の x 座標は

$$x = \left(\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \right)^2$$

である。

3 $n \geq 1$ に対し, $(x+1)^n$ を $x^2 - 2x + 2$ で割った余りを $a_n x + b_n$ と置く。

(1) 関係式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \boxed{\text{ハ}} a_n + \boxed{\text{ヒ}} b_n \\ b_{n+1} &= \boxed{\text{フ}} a_n + \boxed{\text{ヘ}} b_n \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2) a_{25} を 5 で割った余りは $\boxed{\text{ホ}}$ であり, a_{30} を 5 で割った余りは $\boxed{\text{マ}}$ である。また, b_{25} を 5 で割った余りは $\boxed{\text{ミ}}$ であり, b_{30} を 5 で割った余りは $\boxed{\text{ム}}$ である。(ただし, 余りは 0 から 4 までの整数とする。)

(3) $c_n = a_n + k b_n$ と置く。 c_n が $c_{n+1} = t c_n$ (t は定数) の形の漸化式を満たせば,

$$k = \frac{\boxed{\text{メ}} \pm \boxed{\text{モ}} i}{\boxed{\text{ヤ}}}$$

であり, そのとき

$$t = \boxed{\text{ユ}} \mp \boxed{\text{ヨ}} i \quad (\text{複号同順})$$

となる。ただし, $i^2 = -1$ である。

(1) θ が 0 から 2π まで動くときの関数

$$(4 \cos \theta + 3 \sin \theta) \cos \theta$$

の最大値は $\frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}$ であり、最小値は $\frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}$ である。

(2) xy 平面上の関数 $f(x, y)$ を

$$f(x, y) = \frac{7x^2 + 6xy - y^2 + 8}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 - y^2 + 2}$$

と置く。点 (x, y) が原点を中心とした半径 a の円周上を動くときの

$f(x, y)$ の最大値を $M(a)$ と置くと

$$M(a) = \frac{\boxed{\text{ロ}} a^2 + \boxed{\text{ワ}}}{a^4 - a^2 + 2}$$

である。

(3) 点 (x, y) が xy 平面上のすべての点を動くときの $f(x, y)$ の最大値は

$\boxed{\text{あ}}$ である。 $f(x, y)$ が最大となる点 (x, y) は全部で $\boxed{\text{い}}$ 個あり、そ

のうちの x 座標が最大となる点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{う}}}{\sqrt{\boxed{\text{え}}}}, \frac{\boxed{\text{お}}}{\sqrt{\boxed{\text{か}}}} \right)$$

である。