

(1999 年度)

7 数 学 問 題

(この問題冊子は 7 ページ、4 問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が、次の 2、3 ページにある。試験開始 3 分前に監督の指示があるので、それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSやポケットベルのスイッチは切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しきずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 問題冊子、解答用紙、計算用紙を持ち帰ってはならない。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表示するときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともzにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z
0	●	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	●	0	0	0

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位											1 の 位										
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z
●	0	0	●	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	●	0	0	0	0

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ワ}}$ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

1

「方程式 $y^2 + 2y = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3$ をみたす整数の組 (x, y) (以下、整数解と呼ぶ) をすべて求めよ」 という問題を解くことを考える。

まず、両辺に定数 $\boxed{\text{ア}}$ を加えると、その結果得られる左辺は整式の平方で表せることに注意する。

次に、 $|x|$ が十分大きいとき

$$(x^2 + \boxed{\text{イ}}x)^2 < x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 + \boxed{\text{ア}} < (x^2 + \boxed{\text{イ}}x + 1)^2$$

が成り立つ。この不等式をみたす整数 x の範囲は $x \leq \boxed{\text{ウ}}$ または $\boxed{\text{エ}} \leq x$ である。上の左辺の整式と右辺の整式は、 x が整数なら連続する整数の平方である。従って、その間に整数の平方で表せる数はない。

一方、もとの方程式の左辺に $\boxed{\text{ア}}$ を加えたものは、整数を係数とするある整式の平方になっていたから、整数解に対しては、ある整数の平方になっていなくてはならない。

これは矛盾するから、結局 $x \leq \boxed{\text{ウ}}$ または $\boxed{\text{エ}} \leq x$ の範囲に整数解はないことになる。

以上の考察をもとに、すべての整数解を求めると、整数解は $\boxed{\text{オ}}$ 組あり、それらの解のうち絶対値の和 $|x| + |y|$ が奇数になるものは $\boxed{\text{カ}}$ 組ある。

(1) x を -1 以外の実数, n を自然数とし

$$S_n(x) = 1 + \left(\frac{x}{1+x}\right) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{1+x}\right)^n$$

とおく。 $n \rightarrow \infty$ のとき, $S_n(x)$ が収束するための必要十分条件を $x > a$ で表す

と $a = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。 $x > a$ のとき, $S_n(x)$ の $n \rightarrow \infty$ での極限を $S(x)$ とおく。

$x > a$ の範囲で $x \rightarrow a$ とすると, $S(x)$ は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ に収束する。

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2+3+\cdots+n)^5}{(1+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

(3)

$$f_1(x_1) = x_1 + \frac{4}{x_1}$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2 + \frac{4f_1(x_1)}{x_2}$$

.....

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_n + \frac{4f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})}{x_n}$$

とし, $x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0$ の範囲での $f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の最小値を M_n とする。 $M_1 = \boxed{\text{ス}}$ であり, $n \geq 2$ のとき M_n は漸化式

$$\log M_n = \log \boxed{\text{セ}} + \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \log M_{n-1}$$

で計算できる。 $n \rightarrow \infty$ のとき, M_n は $\boxed{\text{チ}}$ に収束する。

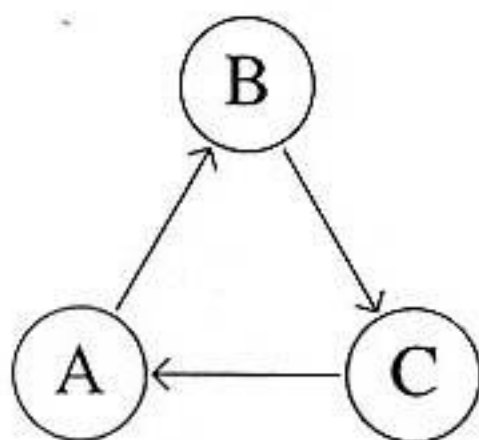
放物線 $y = x^2$ と点 $(0, a)$, $a > 1$ を中心とする半径 1 の円が接しているとする
 と、 $a = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。この円の外部で 円と放物線とで囲まれた図形 F の面積は

$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \frac{\pi}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。また 図形 F を y 軸のまわりに 1 回転してできる回

転体の体積は $\frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} \pi$ である。さらに、この回転体を x 軸のまわりに 1 回転して

できる回転体の体積は $\frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} \sqrt{\boxed{\text{フ}}} \pi$ である。

下図の A から出発して右まわりに、コインを 1 回投げるたびに表が出たら 2 コマ、裏が出たら 1 コマ進む、というゲームを考える。



(1) n 回コインを投げたあとに A, B, C に止まる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると

$$a_{n+1} = \frac{\text{ヘ}}{\text{ホ}} b_n + \frac{\text{マ}}{\text{ミ}} c_n$$

であるので、

$$a_n = \frac{\text{ム}}{\text{メ}} \left(\frac{\text{モ}}{\text{ヤ}} \right)^{n-1} + \frac{\text{ユ}}{\text{ヨ}}$$

となる。よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\text{ラ}}{\text{リ}}$ である。

(2) n 回 コインを投げたあとに初めて A に止まる確率を p_n とすると、 $n \geq 2$ のときには

$$p_n = \left(\frac{\text{ル}}{\text{レ}} \right)^{n-1}$$

となる。初めて A に止まるまでにコインを投げる回数の期待値は $\frac{\text{ロ}}{\text{ワ}}$ である。