

(1999 年度)

8 数 学 問 題

(この問題冊子は 6 ページ、4 問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が、次の 2、3 ページにある。試験開始 3 分前に監督の指示があるので、それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSやポケットベルのスイッチは切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 問題冊子、解答用紙、計算用紙を持ち帰ってはならない。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ-にマークせよ。(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともzにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、-にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z		
0	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	z		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ヨ}}$ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

1

放物線 $y = \frac{1}{15}x^2$ を y 軸のまわりに回転させてできる面を内壁とする容器を考える。そこに水を入れるとき、 y 軸は水面にいつも垂直であるとする。 x 軸と y 軸の長さの単位を cm とする。

(1) 空の容器に $3 \text{ cm}^3/\text{秒}$ の割合で水を入れる。水を入れ始めてから 10 秒後における水面の上昇する速度は $\frac{1}{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\pi}} \text{ cm/秒}$ である。

(2) 容器を空にして、半径 $b \text{ cm}$ ($b > 0$) の鉄球をこの容器の中に入れる。この鉄球が容器に最下点だけで接する必要十分条件は $0 < b \leq \frac{\boxed{\text{イ}}}{2}$ である。

(3) $b = 4 \text{ (cm)}$ とする。鉄球を入れたまま $3 \text{ cm}^3/\text{秒}$ の割合で再び水を入れる。 $0 \leq y \leq 8$ の範囲で水深が $y \text{ cm}$ になるとき、水面の上昇する速度は

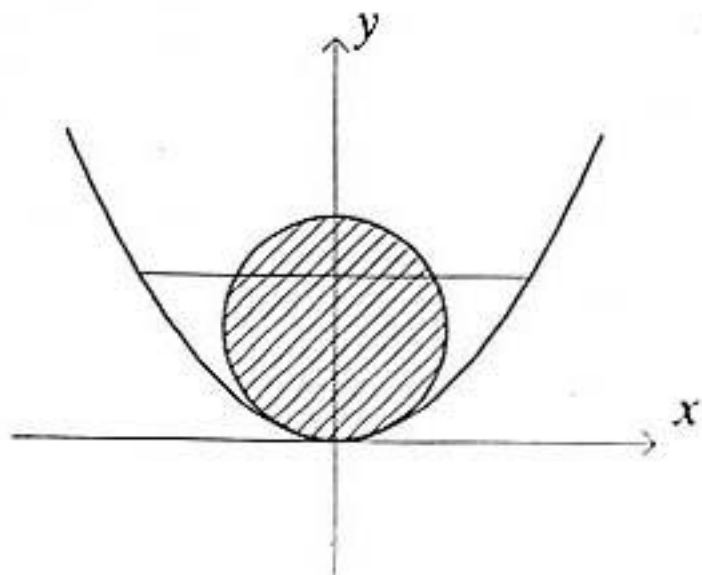
$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\pi y (y + \boxed{\text{エ}})} \text{ cm/秒}$ であり、

加速度は

$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\pi^2} \frac{(\boxed{\text{カ}}y + \boxed{\text{キ}})}{y^{\boxed{\text{ク}}}(y + \boxed{\text{ク}})^{\boxed{\text{ク}}}} \text{ cm/秒}^2$

である。

ただし 鉄球は動かないものとする。



2

(1) $(1 + \boxed{\text{ケ}}i)^4 = \boxed{\text{コ}} - 24i$ が成り立つ。ただし $\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}$ は整数であり、 i は虚数単位である。

(2) $x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 8 = 0$ の複素数解の中で絶対値の最大値は $\boxed{\text{サ}}$ であり、最小値は $\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ である。解の複素数の偏角 $\arg x$ ($0^\circ \leq \arg x < 360^\circ$) をラジアンで表すと、その最大値は $\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\pi$ である。

(3) 複素数平面上の3点 $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -2 + 5i$ を頂点とする三角形を、複素数 α をかけることによって移動し、 $w_1 = 1 + i$, $w_2 = 5$, $w_3 = 5 + 5i$, $w_4 = 2 + 4i$ を頂点とする四角形と共有点をもつようにする。このような複素数 α の中で絶対値の最大値は $\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ であり、最小値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。また 偏角 $\arg \alpha$ ($0^\circ \leq \arg \alpha < 360^\circ$) の最大値を θ , 最小値を φ とすると

$$\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}, \quad \cos \varphi = \frac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

3

方程式

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1$$

をみたす正整数の組 (n_1, n_2, n_3, n_4) (ただし, $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$) をすべて決定しよう。

まず, n_1 の最小値は ネ であり最大値は ノ である。

$n_1 = \text{ネ}$ のとき, n_2 の最小値は ハ であり最大値は ヒ である。

$(n_1, n_2) = (\text{ネ}, \text{ハ})$ のとき, 条件をみたす (n_3, n_4) の組は フ 組あり,

$(n_1, n_2) = (\text{ネ}, \text{ハ} + 1)$ のときは ヘ 組ある。

こうして数えていくと, 結局 全部で ホ 組の解があることがわかる。

4

放物線 $y = x^2$ の点 $P(1,1)$ での接線と点 P で直交する直線を ℓ とする。 ℓ は y 軸と $y = \frac{\text{マ}}{\text{ミ}}$ で交わり, 放物線とは 点 P 以外に $x = -\frac{\text{ム}}{\text{メ}}$ のとき交わる。

ℓ と放物線とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を G と

する。回転体 G の $x \geq 0$ の部分の体積は $\frac{\text{モ}}{\text{ヤ}}\pi$ である。回転体 G をさらに

y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は $\frac{\text{ユ}}{\text{ヨ}}\pi$ である。