

(1999 年度)

10 数 学 問 題

(この問題冊子は 5 ページ, 3 問である。)

「受験についての注意」が次ページにある。試験開始 3 分前に監督の指示があるので、それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSやポケットベルのスイッチは切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のみミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 左側のミシン目は切り離してはならない。
5. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 各問題に対する解答は、その問題番号が記された解答用紙に記入すること。足りない場合は、その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には、何も書いてはいけない。
7. マーク式解答用紙には何も記入しないこと。
8. 解答用紙を、切り離してはいけない。採点が不可能になる。
9. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
10. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
11. 試験時間中に退場することはできない。
12. 問題冊子、解答用紙、計算用紙を持ち帰ってはならない。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

1

漸化式

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 3a_n^2 + 4a_n + 3 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定まる整数列 $\{a_n\}$ を考える。

- (1) $a_n - 4$ が 7 で割り切れることを証明せよ。
- (2) $a_n^2 + a_n + 1$ が 7^n で割り切れることを証明せよ。
- (3) 正整数 p について、 a_n^{3p} を 7^n で割った余りを求めよ。

2

関数 $y = f(x)$ は連続とする。

- (1) a を実数の定数とする。すべての実数 x に対して 不等式

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{2}{3} |x - a|$$

が成り立つなら、曲線 $y = f(x)$ は 直線 $y = x$ と必ず交わることを中間値の定理を用いて証明せよ。

- (2) さらに、すべての実数 x_1, x_2 に対して

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{2}{3} |x_1 - x_2|$$

が成り立つならば、(1) の交点はただひとつしかないことを証明せよ。

$y = x^2$ によって定まる xy 平面上の放物線を C とする。 C 上にない点 P , C 上の 2 点 Q, R について, $\angle QPR$ は直角, 線分 PQ は点 Q で C の接線と直交し, 線分 PR は点 R で C の接線と直交しているとする。

- (1) 点 Q, R が C 上を動くときにできる点 P の軌跡の方程式を求めよ。
- (2) 点 Q の座標を (a, a^2) とし, $a > 0$ とする。三角形 PQR の面積を $S(a)$ とおく。 $S(a)$ を求めよ。
- (3) 点 Q が C 上を動くとき, 三角形 PQR の面積の最小値を求めよ。