

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ロ}}$ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

1

(1) $a_1 = 5, a_2 = 12, a_3 = 21, \dots$ なる数列 $\{a_n\}$ がある。この数列の階差数列 $\{b_n\}$ が等差数列のとき、 $b_n = \boxed{\text{ア}}n + \boxed{\text{イ}}$ であり、 $a_n = \boxed{\text{ウ}}n^2 + \boxed{\text{エ}}n + \boxed{\text{オ}}$ である。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n} - n) = \boxed{\text{カ}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{a_n}{n}} - \sqrt{n} \right) = \boxed{\text{キ}}$$

である。

(2) 点 $(1, 5)$ を通り、方向ベクトルが $(1, 2)$ である直線 ℓ がある。

点 $(5, 1)$ を通り、直線 ℓ と直交する直線は ℓ と点 $\left(\begin{array}{|c|} \hline \boxed{\text{ク}} \\ \hline \boxed{\text{ケ}} \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \boxed{\text{コ}} \\ \hline \boxed{\text{サ}} \end{array} \right)$ で交わる。

次の ア から ロ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

i を虚数単位, x, y, X, Y を実数とし, $z = x + iy, w = X + iY$ を複素数平面上の点とする。

(1) $w = z + \frac{1}{z}$ の関係があるとき, z が $|z| = 1$ である円周上を動くとき w は

$$\boxed{\text{シ}} \leq X \leq \boxed{\text{ス}}, Y = \boxed{\text{セ}}$$

の範囲をすべて動く。 z が $|z| = 2$ である円周上を動くとき w は

$$\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}X^2 + \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}Y^2 = 1$$

を満たすように動く。また z が $x = y$ である直線上 (原点を除く) を動くとき w は

$$X^2 + \boxed{\text{テ}}Y^2 = \boxed{\text{ト}}$$

を満たすように動く。

(2) $w = \frac{1-z}{1+z}$ の関係があるとき, z が $|z| = 1$ である円周上の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分を動くとき w は

$$X = \boxed{\text{ナ}}, \boxed{\text{ニ}} \leq Y \leq \boxed{\text{ヌ}}$$

の範囲をすべて動く。

次の ア から ロ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

一辺の長さ 1 の正三角形 PQR の内接円 C_1 の中心を O_1 とする。
 円 C_1 と二辺 PQ, PR に接する円 C_2 の中心を O_2 とする。次に円 C_1 と
 C_2 と辺 PR に接する円 C_3 の中心を O_3 とする。円 C_i の半径を r_i とする
 ($i = 1, 2, 3$)。このとき

$$r_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

である。点 O_i から辺 PR に下ろした垂線と辺 PR との交点を H_i とする
 ($i = 1, 2, 3$)。線分 H_1H_3, H_2H_3 の長さをそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とする。このとき

$$\ell_1 + \ell_2 = \frac{1}{\boxed{\text{フ}}}, \quad \ell_1^2 = \boxed{\text{ヘ}} r_1 r_3$$

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \sqrt{\boxed{\text{ホ}}}, \quad r_3 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{マ}}}}{\boxed{\text{ミ}}} - \frac{1}{\boxed{\text{ム}}}$$

である。

次の ア から ロ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

4

xyz 空間において $P(0, 0, 1)$, $Q(3\cos\theta, 3\sin\theta, 1)$ を両端とする長さ 3 の線分 PQ を考える。ただし θ はラジアンで表し、 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲である。

このとき P と Q の中点より x 軸までの距離は $\sqrt{\frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}} \sin^2 \theta + \boxed{\text{ヤ}}}$ である。

この線分 PQ を x 軸を中心に 1 回転するとき出来る曲面と、 $x = 0$, $x = 3\cos\theta$ の 2 平面で囲まれる部分の体積 V は $(\boxed{\text{ユ}} \cos \theta + \boxed{\text{ヨ}} \cos^3 \theta)\pi$ である。この体積 V は $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}$ のとき、最大値 $\frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}} \pi$ になる。このとき θ は

$$\frac{\pi}{\boxed{\square} + 1} < \theta < \frac{\pi}{\boxed{\square}}$$

を満たす (ただし $\boxed{\square}$ は自然数)。