

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

1

座標平面において $y \geq x^2$, $y \leq -(x-a)^2 - a + 6$ を同時に満たす領域を T , その面積を S とする。

(1) T が空集合でないのは

$$\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \leq a \leq \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

のときである。このとき、 T に含まれる点の x 座標の最小値を α , 最大値を β とすると

$$S = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}(\beta - \alpha)\boxed{\text{オ}}$$

が成り立つ。

(2) S が最大となるのは $a = \boxed{\text{カ}}$ のときである。

(3) x 座標, y 座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。 $a = \boxed{\text{カ}}$ のとき、 T に含まれる格子点の個数は $\boxed{\text{キ}}$ である。

次の ア から メ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

半径 1 の円に内接する正 $2n$ 角形を底面とする正 $2n$ 角柱を考える。底面の正 $2n$ 角形の頂点を順に $A_0, A_1, \dots, A_{2n-1}$ とする。

A_0 から出発して底面と常に 角度 45° で角柱の側面をまわりながら登って行く 2 つの折れ線を ℓ_1, ℓ_2 とする。ただし ℓ_1 は辺 A_0A_1 と角度 45° をなすように出発し, ℓ_2 は辺 A_0A_{2n-1} と角度 45° をなすように出発する。 ℓ_1, ℓ_2 が初めて出会う点を X_n , 二番目に出会う点を Y_n とする。

次に, A_0 から出発して ℓ_1 上を X_n まで進み, X_n から Y_n までは ℓ_2 上を進み, Y_n から X_n へ戻るのに ℓ_1 上を進み, X_n から A_0 へ戻るのに ℓ_2 上を進む。こうして得られる折れ線で囲まれる角柱の側面上の図形, すなわち A_n, X_n を通る辺で側面を切り開いたときに出来る図形の面積を S_n とする。底面から測った, 点 X_n の高さを h_n とする。

このとき

$$h_2 = \boxed{\text{ク}} \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}, S_2 = \boxed{\text{コ}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \boxed{\text{サ}} \pi^{\boxed{\text{シ}}}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\text{ス}} \pi^{\boxed{\text{セ}}}$$

となる。

次の ア から メ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

座標平面上で、 $y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ (ただし $x > 1$) で表される曲線を C とする。

(1) この曲線 C は、 x を y で表すと

$$x = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}(e^y + e^{-y}) \quad (\text{ただし } y > 0)$$

と表せる。

(2) C 上の点 $P(a, b)$ での C の接線を ℓ , ℓ と y 軸の交点を Q , 線分 PQ の長さを L とおく。 $a = 3$ のとき, $L = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{テ}}} \sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。点 P が C 上を動くとき, L の最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。

(3) C と、 C 上の点 $P(a, b)$ での接線 ℓ および x 軸で囲まれる図形の面積を S とする。 $a = 3$ のとき, (1) を使い y で積分することを利用すると

$$S = \boxed{\text{ナ}} \sqrt{\boxed{\text{ニ}}} \{\log(3 + 2\sqrt{2})\}^2 + \boxed{\text{ヌ}} \log(3 + 2\sqrt{2}) + \boxed{\text{ネ}} \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

となる。

次の ア から メ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

複素数平面において、原点から実軸上を正の向きに1だけ進んだ点を P_1 とする。原点から P_1 まで進んだ方向より 60° 正の向きに方向を変え、 P_1 から $\frac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_2 とする。 P_1 から P_2 まで進んだ方向より 30° 正の向きに方向を変え、 P_2 から $\frac{1}{4}$ だけ進んだ点を P_3 とすると、

$$P_3 \text{ の虚部} = \frac{\boxed{\text{ハ}} + \sqrt{3}}{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。 P_2 から P_3 まで進んだ方向より 60° 正の向きに方向を変え、 P_3 から $\frac{1}{8}$ だけ進んだ点を P_4 とすると、

$$P_4 \text{ の実部} = \frac{\boxed{\text{フ}} - \sqrt{3}}{\boxed{\text{ヘ}}}$$

となる。次に P_3 から P_4 まで進んだ方向より 30° 正の向きに方向を変え、 P_4 から $\frac{1}{16}$ だけ進んだ点を P_5 とする。以後同様に進む長さを半分ずつにし、 60° 、 30° と交互に方向を変えていくと P_n は複素数

$$\frac{\boxed{\text{ホ}} - \sqrt{3}}{\boxed{\text{マ}}} + \frac{\boxed{\text{ミ}} + \boxed{\text{ム}}\sqrt{3}}{\boxed{\text{メ}}}i$$

に近づく。ただし、 i は虚数単位である。