

1

数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を次で定義する。

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 4, \quad z_1 = 5$$

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2, \quad y_{n+1} = 2x_n y_n, \quad z_{n+1} = z_n^2$$

(1) $n \geq 1$ に対し, $x_n^2 + y_n^2 = z_n^2$ が成立することを示せ。

(2) $n \geq 1$ に対し, $x_n \neq 0$ が成立することを示せ。

2

xyz 空間において $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$ で定義される半球面を S とする。この半球面 S と xy 平面とで囲まれた領域に含まれ、かつ半球面 S と xy 平面とに接する球を考える。このような球の中心の全体は、ある曲面 F を描く。

- (1) F と xz 平面との交線はどのような曲線か。
- (2) F と xy 平面とで囲まれる領域の体積を求めよ。
- (3) $x = \frac{1}{2}$ である平面と F との交線は、どのような曲線か。

3

(1) 実数 x が $0 < x < 1$ の範囲を動くとき、関数 $|\sqrt{x} \log x|$ の最大値を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を証明せよ。

(3) $f(x) = (1-x) \log(1-x) - x \log x$ とおく。
 $0 < x < \frac{1}{2}$ のとき、 $f(x) > 0$ が成り立つことを証明せよ。

(4) 不等式

$$\log x \log(1-x) \leq C$$

が $0 < x < 1$ の範囲で成り立つための正定数 C の条件を求めよ。