

1 (1) 次の計算をせよ。

$$\frac{1}{3} \log_3 125 + \log_{\sqrt{3}} 4 - \log_9 64 = \log_3 \boxed{\text{ア}}$$

(2) 6つの数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 から異なる 3 つを選び, それらを並べて 3 けたの数を作る。このとき偶数は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある。

(3) x^3 の係数が 1 である 3 次関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は, 0, a , 1 である。ただし, $0 < a < 1$ とする。点 $(a, 0)$ における $y = f(x)$ のグラフの接線 ℓ の傾きは $\boxed{\text{ウ}} a^2 + \boxed{\text{エ}} a$ である。接線 ℓ

と y 軸との交点を P とする。原点 O から P までの距離は, $a = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

のとき最大となる。

2 $y = x^2$ のグラフを平行移動して、頂点を (a, a) に移した放物線を A , 放物線 $y = -2x^2 + 3$ を C とする。

(1) A と C が共有点をもつための必要十分条件は,

$$\boxed{\text{キ}} \leq a \leq \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \quad \text{である。}$$

(2) $a = 3$ とするとき, 2本の直線

$$\ell_1: y = \boxed{\text{コ}}x + \boxed{\text{サ}}, \quad \ell_2: y = \boxed{\text{シ}}x + \boxed{\text{ス}}$$

(ただし $\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{シ}}$ とする) は共に A と C の共通な接線であり,

ℓ_1 と C との接点は $(\boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソ}})$, ℓ_2 と C との接点は $(\boxed{\text{タ}}, \boxed{\text{チ}})$ である。

3 座標平面において ベクトル $\vec{a} = (2, 0)$ と大きさが等しく, $\vec{a}$ とのなす角が 120° であるベクトルは $\left(\boxed{\text{ツ}}, \pm \sqrt{\boxed{\text{テ}}} \right)$ である。 $\vec{b} = \left(\boxed{\text{ツ}}, \sqrt{\boxed{\text{テ}}} \right)$ とおく。整数 m, n により $m\vec{a} + n\vec{b}$ と表されるベクトル $\vec{x}$ であって, その大きさが $\vec{a}$ と等しいものをすべて求めよう。

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \boxed{\text{ト}} \quad \text{であり,}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \boxed{\text{ナ}} m^2 + \boxed{\text{ニ}} mn + \boxed{\text{ヌ}} n^2$$

であるから,

$$\left(m + \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}} n \right)^2 + \frac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}} n^2 = \boxed{\text{フ}}$$

となる。 m, n が整数であることより, このような m, n の組は全部で $\boxed{\text{ヘ}}$ 個ある。その中で $m + n$ が最小なものは $m = \boxed{\text{ホ}}, n = \boxed{\text{マ}}$ である。