

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまる数値を答えよ。ただし、 π は円周率とする。

1

半径が 1, 中心角が θ ($0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$) の扇形 AOB を考える。ただし O は原点で $A(1, 0)$, $\angle AOB = \theta$, B の y 座標は正である。この扇形に内接する円の中心を $P(x, y)$ とする。

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき $x = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}$, $y = \frac{1}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) 一般に点 P は曲線 C

$$C: \boxed{\text{ウ}}x^m + \boxed{\text{エ}}y = 1, m = \boxed{\text{オ}}$$

の上にある。

(3) 点 P における曲線 C の接線を ℓ とするとき、 ℓ と x 軸および y 軸で囲まれた三角形の面積は $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲では最小値 $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ をとる。

(4) 曲線 C, $\theta = \frac{\pi}{3}$ のときの線分 OP および線分 OA で囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \pi$ である。

2

半径 1 の球面 A の内側にあり、すべての頂点が 球面 A 上にある立方体 B の 1 辺の長さは $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ となる。球面 A の内側で、立方体 B の外

側にある最大な球 C の半径は $\frac{\boxed{\text{セ}} - \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ となる。球面 A の内側で、立

方体 B と球 C の外側にあり、球 C に接している最大な球の半径は、 $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ となる。

3

実数 a に対し, z に関する方程式

$$z^2 - az + a^2 - 3a = 0 \quad (*)$$

を考える.

(1) 方程式 $(*)$ が 2 つの異なる正の実数解を持つための条件は,

$\boxed{\text{テ}} < a < \boxed{\text{ト}}$ である.

以後 $a > \boxed{\text{ト}}$ の範囲で考える. このとき方程式 $(*)$ は 2 つの虚数解を持ち, z_1 を虚部が正の解とする.

(2) $z_1 = x + iy$ (x, y は実数, i は虚数単位) とすると, x, y は

$$\boxed{\text{ナ}}(x + \boxed{\text{ニ}})^2 + \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}y^2 = 1$$

を満たす.

(3) z_1 の偏角を θ_1 ($0 < \theta_1 < \pi$) とおくと

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tan \theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$$

が成り立つ.

(4) z_1^4 が実軸上に存在するとき, $a = \boxed{\text{ヒ}}$ である.

4

n を 1 以上の整数とし, 1 以上 n 以下の整数から重複を許して無作為に選んだ 4 つの値を x_1, y_1, x_2, y_2 とする. 座標平面上の 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ を考える.

(1) $|x_1 - x_2|$ の期待値 a_n は

$$a_n = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}(n + \boxed{\text{ホ}}n^k), k = \boxed{\text{マ}}$$

である.

(2) $(x_1 - x_2)^2$ の期待値 b_n は

$$b_n = \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}}(n^\ell - 1), \ell = \boxed{\text{メ}}$$

である.

(3) 線分 PQ を対角線とし, 一辺が x 軸に平行な長方形の面積の期待値を R_n , 線分 PQ を直径とする円の面積の期待値を S_n とすれば,

$$\frac{S_n}{R_n} = \frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}\frac{b_n}{a_n^2}\pi$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{R_n} = \frac{\boxed{\text{ユ}}}{\boxed{\text{ヨ}}}\pi$$

である.