

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ユ}}$ に当てはまる数値を答えよ. ただし, π は円周率とする.

1

x 軸上を動く点 P の時刻 t での位置が $x = e^{-\sqrt{3}t} \cos t$ であるとする. このとき, P の速度 v は

$$v = \boxed{\text{ア}} e^{-\sqrt{3}t} \sin(t - \alpha), \quad \boxed{\text{ア}} > 0, \quad 0 \leq \alpha = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \pi < 2\pi$$

である. $M = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ とおく.

$\alpha \leq t \leq \pi + \alpha$ の間に P が動く距離 ℓ は

$$\ell = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} (M^a + M^b), \quad a = \boxed{\text{カ}}, \quad b = \boxed{\text{キ}}, \quad a < b$$

となる.

$\pi + \alpha \leq t \leq 2\pi + \alpha$ の間に P が動く距離は $M^c \ell$, $c = \boxed{\text{ク}}$ となる. よって $0 \leq t \leq t_1$ の間に P が動く道のりは $t_1 \rightarrow +\infty$ のとき

$$\boxed{\text{ケ}} + \frac{M^d}{1 - M^c}, \quad d = \boxed{\text{コ}}$$

に限りなく近づく.

2

相異なる 3 つの複素数 a, b, c に対し、集合として

$$\{a, b, c\} = \{a^2, b^2, c^2\}$$

が成り立つとする.

(1) a, b, c の中で自分自身の平方と等しいものがあるとき、

$$\{a, b, c\} = \left\{ \boxed{\text{サ}}, \frac{\boxed{\text{シ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ス}}} i}{\boxed{\text{セ}}} \right\} \text{ または } \left\{ \boxed{\text{ソ}}, \frac{\boxed{\text{シ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ス}}} i}{\boxed{\text{セ}}} \right\}$$

である. ただし i は虚数単位で, $\boxed{\text{サ}} < \boxed{\text{ソ}}$ である.

(2) a, b, c がどれも自分自身の平方と等しくないとき, a, b, c は方程式

$$t^n + \boxed{\text{タ}} = 0$$

$$0 < n = \boxed{\text{チ}} < 10$$

の解で、集合として $\{a, b, c\}$ は $\boxed{\text{ツ}}$ 通りの可能性がある. どの場合におい

ても $a + b + c$ の実部は $\begin{array}{c} \boxed{\text{テ}} \\ \boxed{\text{ト}} \end{array}$ である.

3

容器 A には濃度 20 % の食塩水が 400 グラム (よって食塩が 80 グラム含まれている), 容器 B には濃度 8 % の食塩水が 800 グラム ある. A から 100 グラム, B から 100 グラム をそれぞれ取り出したのち, A から取り出した分を B へ, B から取り出した分を A へ入れてよくかき混ぜる. この操作を n 回繰り返したときの容器 A の食塩の量を a_n グラム, 容器 B の食塩の量を b_n グラム とすると

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}a_n + \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}b_n$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a_n + \boxed{\text{ヒ}}$$

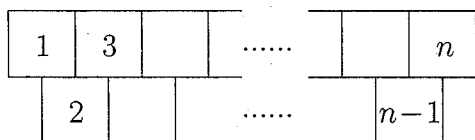
が成り立つ. したがって n 回繰り返したときの容器 A の食塩水の濃度は

$$\boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}} \left(\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \right)^n \%$$

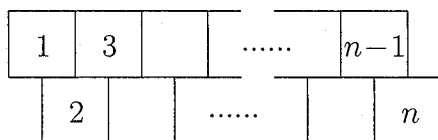
である.

4

自然数 n に対し、図のように正方形 n 個を並べた図形を考える。



n が奇数のとき



n が偶数のとき

左上の正方形 1 から出発し、隣り合う正方形に進むことを繰り返して、すべての正方形を 1 度ずつ通る方法が a_n 通りあるとする。 $a_1 = a_2 = 1$ であり、 a_3 は $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ の 2 通りの方法があるので、 $a_3 = 2$ となる。

(1) $a_4 = \boxed{\text{ホ}}$ である。

(2) n が十分大きいとき、 a_n 通りの方法のうち、始めに右下の正方形 2 に進む方法が a_{n-p} 通り、 $p = \boxed{\text{マ}}$, 始めに右の正方形 3 に進む方法が $(a_{n-q} + \boxed{\text{ミ}})$ 通り、 $q = \boxed{\text{ム}}$, あるので、 $n > q$ のとき、 $a_n = a_{n-p} + a_{n-q} + \boxed{\text{ミ}}$ が成り立つ。

(3) a_n 通りの方法のうち、右端の正方形 n で終わる方法が b_n 通りあるとする。 $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ である。(2) と同様に考えると $b_n = b_{n-p} + b_{n-q}$ が成り立つ。 n が十分大きいとき、 a_n 通りの方法のうち、 $\boxed{\text{メ}} \leq m \leq n - \boxed{\text{モ}}$ に対して、正方形 m で終わる方法が b_{m-r} 通り、 $r = \boxed{\text{ヤ}}$, あるので、

$$a_n = \sum_{m=\boxed{\text{メ}}}^{n-\boxed{\text{モ}}} b_{m-r} + b_n$$

が成り立つ。

(4) $a_{10} = \boxed{\text{ユ}}$ である。