

問題 **1** ~ **3** の解答は, **ア** から **ヘ** に当てはまる数値を, マーク用解答用紙にマークせよ. ただし, π は円周率とする. 問題 **4** の解答は, 解答用紙 A (マーク用解答用紙の上に添付された白紙の解答用紙) に記せ. 解答用紙 A では, 式だけではなく, 解答の流れを文章を含めて適切に説明すること.

1

x 軸上を動く点 P の時刻 t での位置が $x = e^{-\sqrt{3}t} \cos t$ であるとする. このとき, P の速度 v は

$$v = \boxed{\text{ア}} e^{-\sqrt{3}t} \sin(t - \alpha), \boxed{\text{ア}} > 0, 0 \leq \alpha = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \pi < 2\pi$$

である. $M = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ とおく.

$\alpha \leq t \leq \pi + \alpha$ の間に P が動く距離 ℓ は

$$\ell = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} (M^a + M^b), a = \boxed{\text{カ}}, b = \boxed{\text{キ}}, a < b$$

となる.

$\pi + \alpha \leq t \leq 2\pi + \alpha$ の間に P が動く距離は $M^c \ell$, $c = \boxed{\text{ク}}$ となる. よって $0 \leq t \leq t_1$ の間に P が動く道のりは $t_1 \rightarrow +\infty$ のとき

$$\boxed{\text{ケ}} + \frac{M^d}{1 - M^c}, d = \boxed{\text{コ}}$$

に限りなく近づく.

2

相異なる 3 つの複素数 a, b, c に対し、集合として

$$\{a, b, c\} = \{a^2, b^2, c^2\}$$

が成り立つとする.

(1) a, b, c の中で自分自身の平方と等しいものがあるとき,

$$\{a, b, c\} = \left\{ \boxed{\text{サ}}, \frac{\boxed{\text{シ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ス}}}i}{\boxed{\text{セ}}} \right\} \text{ または } \left\{ \boxed{\text{ソ}}, \frac{\boxed{\text{シ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ス}}}i}{\boxed{\text{セ}}} \right\}$$

である. ただし i は虚数単位で, $\boxed{\text{サ}} < \boxed{\text{ソ}}$ である.

(2) a, b, c がどれも自分自身の平方と等しくないとき, a, b, c は方程式

$$t^n + \boxed{\text{タ}} = 0$$

$$0 < n = \boxed{\text{チ}} < 10$$

の解で、集合として $\{a, b, c\}$ は $\boxed{\text{ツ}}$ 通りの可能性がある. どの場合におい

ても $a + b + c$ の実部は $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である.

3

容器 A には濃度 20 % の食塩水が 400 グラム (よって食塩が 80 グラム含まれている), 容器 B には濃度 8 % の食塩水が 800 グラム ある. A から 100 グラム, B から 100 グラム をそれぞれ取り出したのち, A から取り出した分を B へ, B から取り出した分を A へ入れてよくかき混ぜる. この操作を n 回繰り返したときの容器 A の食塩の量を a_n グラム, 容器 B の食塩の量を b_n グラム とすると

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}a_n + \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}b_n$$

$$a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}a_n + \boxed{\text{ヒ}}$$

が成り立つ. したがって n 回繰り返したときの容器 A の食塩水の濃度は

$$\boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}} \left(\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \right)^n \%$$

である.

4

m, n を自然数とする. m 人の客を乗せたバスが出発し, 順に $1, 2, \dots, n$ と番号の付いた n ケ所のバス停を通り車庫に入る. 途中のバス停で乗る乗客はないとする. バスは, 降りる客が 1 人もいないバス停は通過する. また, 各乗客は他の乗客と無関係に, $1 \sim n$ 番のバス停のいずれかに同じ確率 $\frac{1}{n}$ で降りるとする.

(1) 最初の乗客が 1 人のとき, つまり $m = 1$ のとき, その乗客が 1 番のバス停で降りない確率はいくらか. また, 最初の乗客が m 人のとき, 1 番のバス停で降りる客が 1 人もいない確率はいくらか.

(2) 1 番のバス停でバスが止まる確率 $p(m, n)$ を求めよ. また, $1 \sim n$ 番のバス停に止まる回数, つまり出発してから車庫に入る前までにバス停に止まる回数の期待値 $E(m, n)$ はいくらか.

(3) $m = n$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n, n)$$

を求めよ.

(4) m を偶数とし, 2 台のバスで $\frac{m}{2}$ 人ずつ乗客を運ぶことを考える. 2 台のバスがバス停に止まる回数の和の期待値 $E_2(m, n)$ を求め,

$$E(m, n) < E_2(m, n)$$

を示せ.