

1

次の関係式で定められる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ を考える.

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 3$$

$$x_{n+1} = x_n(y_n - z_n), \quad y_{n+1} = y_n(x_n - z_n), \quad z_{n+1} = (x_n - z_n)(y_n - z_n)$$

$$(n \geq 1)$$

- (1) x_{n+2} , y_{n+2} , z_{n+2} の各々を x_n , y_n , z_n を使って表せ.
- (2) $n \geq 1$ に対し, $5x_n - 16y_n + 2z_n = 0$ が成立することを示せ.
- (3) $n \geq 1$ に対し, $x_n \neq 0$ が成立することを示せ.

2

座標空間で考える. xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を y 軸の周りに 1 回転してできる曲面を K とし, 点 $(0, \frac{1}{4}, 0)$ および点 $(\frac{-1}{4\sqrt{3}}, 0, 0)$ を通り xy 平面に垂直な平面を H とする. さらに曲面 K と平面 H によって囲まれる立体を V とする.

- (1) 立体 V と平面 $z = t$ との共通部分の面積 $S(t)$ を t の式で表せ.
- (2) 立体 V の体積を求めよ.

3

(1) 10 から 15 までの自然数を, 連続した 2 個以上の自然数の和としてそれぞれ表せ.

(2) 自然数 n が 2 の累乗でなければ, つまり $n = 2^m(2\ell + 1)$, $m \geq 0$, $\ell \geq 1$ と表されるならば, n は連続した 2 個以上の自然数の和として表されることを証明せよ.

(3) 自然数 n が 2 の累乗ならば, つまり $n = 2^m$, $m \geq 1$ ならば, n は連続した 2 個以上の自然数の和として表せないことを証明せよ.