

$$\textcircled{1} (1) z_4 = z, \quad z_2 = t z_3 + (1-t) z_4 \\ = t(1-t) + it$$

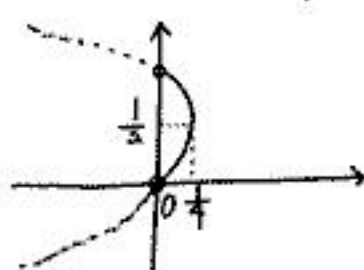
となる。

$$\text{実部 } t(1-t) = x$$

$$\text{虚部 } t = y$$

$$\text{とおくと, } x = y(1-y) = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, \quad 0 < y < 1$$

これより, 右図を得る



$$(2) \quad z_4 = (1-t) z_1 + t z_2 \\ z_4 = t z_3 + (1-t) z_4 \\ = t z_3 + (1-t) \{ (1-t) z_1 + t z_2 \} \\ = (1-t)^2 z_1 + t(1-t) z_2 + t z_3 \\ f(z_4) = \alpha z_4 + \beta \\ = \alpha \{ (1-t)^2 z_1 + t(1-t) z_2 + t z_3 \} + \beta \quad \text{--- ①} \\ w_1 = f(z_1) = \alpha z_1 + \beta \quad \text{であるので} \\ w_4 = (1-t)^2 w_1 + t(1-t) w_2 + t w_3 \\ = (1-t)^2 (\alpha z_1 + \beta) + t(1-t) (\alpha z_2 + \beta) + t (\alpha z_3 + \beta) \\ = \alpha \{ (1-t)^2 z_1 + t(1-t) z_2 + t z_3 \} + \beta \quad \text{--- ②}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } f(z_4) = w_4$$

となり,  $f(z_4)$  と  $w_4$  は同じ点を表わすので, その軌跡は一致する。

$$(3) \quad z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_2 = x_2 + y_2 i, \quad z_3 = x_3 + y_3 i \quad \text{とする。}$$

ただし  $x_i, y_i$  は実数 ( $i=1, 2, 3$ )

$$z_4 = (1-t)^2 (x_1 + y_1 i) + t(1-t) (x_2 + y_2 i) + t (x_3 + y_3 i)$$

$$z_4 = x + y i \quad \text{としたとき}$$

$$\begin{cases} x = x_1(1-t)^2 + x_2 t(1-t) + x_3 t \\ y = y_1(1-t)^2 + y_2 t(1-t) + y_3 t \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 \quad \text{が成立するので}$$

$$y_1(1-t)^2 + y_2 t(1-t) + y_3 t = \frac{1}{2} \{ x_1(1-t)^2 + x_2 t(1-t) + x_3 t \}^2 \\ = \frac{1}{2} \{ (x_1 - x_2) t^2 + (-2x_1 + x_2 + x_3) t + x_1^2 \}^2$$

これが  $t$  について恒等式になるので, 左辺は  $t$  の 2 次式, 右辺は  $t$  の 4 次式であることから  $x_1 - x_2 = 0$  となることが必要。

$$\therefore x_1 = x_2 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{このとき, } y_1(1-t)^2 + y_2 t(1-t) + y_3 t = \frac{1}{2} \{ (x_3 - x_1) t + x_1^2 \}^2 \quad \text{--- ④}$$

$$x = (x_3 - x_1) t + x_1$$

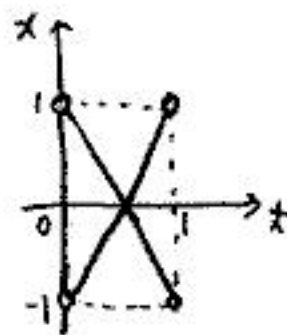
$x$  は  $t$  の 1 次式 となる。

$0 < t < 1$  かつ  $-1 < x < 1$  に対応する

$$x = 2t - 1 \quad \text{または} \quad x = -2t + 1$$

$$\text{即ち } \begin{cases} x_3 - x_1 = 2 \\ x_1 = -1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x_3 - x_1 = -2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore (x_1, x_2, x_3) = (-1, -1, 1) \quad \text{または} \quad (1, 1, -1)$$



いずれの場合も ④より

$$y_1(1-t)^2 + y_2 t(1-t) + y_3 t = \frac{1}{2} (2t-1)^2 \quad \text{が } t \text{ について恒等式であることから}$$

係数を比較して

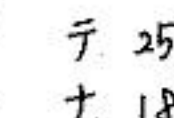
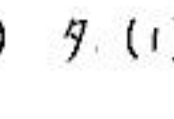
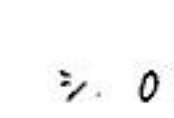
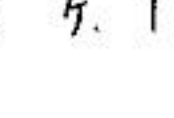
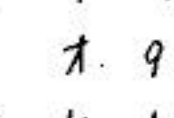
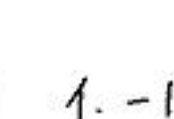
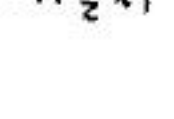
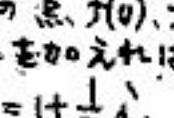
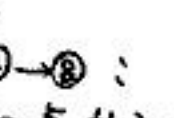
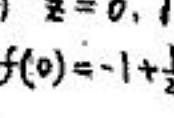
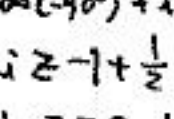
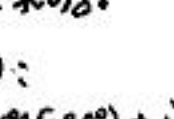
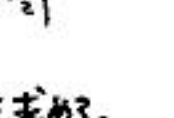
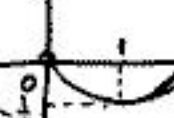
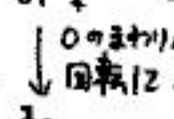
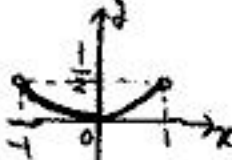
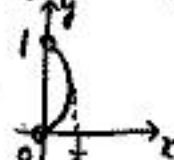
$$\begin{cases} y_1 - y_2 = 2 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 = -2 \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{これより } \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{3}{2} \\ y_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{以上より } (z_1, z_2, z_3) = (-1 + \frac{1}{2}i, -1 - \frac{3}{2}i, 1 + \frac{1}{2}i)$$

$$\text{または } (1 + \frac{1}{2}i, 1 - \frac{3}{2}i, -1 + \frac{1}{2}i)$$

$$\text{(参考)} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$z_4 = t(1-t) + ti \xrightarrow{f} y = \frac{1}{2} x^2 \quad (-1 < x < 1)$$



操作  $f$  を求める。

経路 ①:

$$z \{ \cos(-90^\circ) + i \sin(-90^\circ) \} \times 2 = -1 + \frac{1}{2}i$$

$$= -2i z - 1 + \frac{1}{2}i = f(z)$$

これにより  $z=0, 1, i$  はそれぞれ

$$z_1 = f(0) = -1 + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = f(1) = -1 - \frac{3}{2}i, \quad z_3 = f(i) = 1 + \frac{1}{2}i$$

となる。

経路 ④→③:

上記の点  $f(0), f(1), f(i)$  をそれぞれ  $y$  軸 (虚軸) に対称移動する操作を加えればよいので

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = 1 - \frac{3}{2}i, \quad z_3 = -1 + \frac{1}{2}i \quad \text{となる。}$$

②

$$(1) \text{ア. } -1 \quad \text{イ. } -1 \quad \text{ウ. } 3$$

$$(2) \text{エ. } 8 \quad \text{オ. } 9 \quad \text{カ. } 8 \quad \text{キ. } 9$$

$$(3) \text{ク. } -8 \quad \text{ケ. } 1 \quad \text{コ. } 9$$

③

$$(1) \text{サ. } 1 \quad \text{シ. } 0 \quad \text{ス. } 0 \quad \text{セ. } 1$$

$$(2) \text{ソ. } (4) \quad \text{タ. } (1)$$

④

$$(1) \text{チ. } 90$$

$$(2) \text{ツ. } 9 \quad \text{テ. } 25$$

$$(3) \text{ト. } 7 \quad \text{ナ. } 18$$