

1 a, b は整数とする。 x の整式 P, Q が

$$P + Q = x^2 + 2x + a + b$$

$$P^2 + Q^2 = x^4 + 2x^3 + (2b + 2)x^2 + (2a + 2b)x + 2a + 4$$

をみたしている。

(1) 積 PQ は x の ア 次式である。

(2) a, b は関係式

$$a^2 + b^2 + \text{ イ } a + \text{ ウ } b + \text{ エ } = 0$$

をみたす。

(3) a, b は整数であるので、 a, b の組 (a, b) は全部で オ 通りある。

(4) P が Q で割り切れるとき、

$$P = \text{ カ } x^2 + \text{ キ } x + \text{ ク }$$

$$Q = \text{ ケ } x^2 + \text{ コ } x + \text{ サ }$$

である。

2 a, b, c, d は正の実数とする。 xy 平面上の 4 点

$$A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(-b, \frac{1}{b}\right), C\left(-c, -\frac{1}{c}\right), D\left(d, -\frac{1}{d}\right)$$

を考える。四角形が凸四角形であるとは、すべての内角が 180° より小さいことをいう。

- (1) $b = \frac{1}{3}, c = \frac{7}{3}, d = 2$ のとき、点 A, B, C, D が 1 つの凸四角形の頂点となるための必要十分条件は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} < a < \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} < a$$

である。

- (2) $c = 1, d = \frac{1}{2}$ のとき、どのような正の実数 a に対しても、点 A, B, C, D が 1 つの凸四角形の頂点となるための必要十分条件は

$$\boxed{\text{ツ}} \leq b < \boxed{\text{テ}}$$

である。

- (3) $b = \frac{1}{a}, c = a, d = \frac{1}{a}$ のとき、四角形 ABCD の面積 S は

$$\boxed{\text{ト}} \left(a^{\boxed{\text{ナ}}} + a^{\boxed{\text{ニ}}} \right)$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ナ}} > \boxed{\text{ニ}}$ とする。 $a = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき、 S は最小値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとる。

3

xy 平面上の4点 $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ を頂点とする正方形の各辺が鏡でできているとする。このとき原点 O にある光源から点 (m, n) に向かって光を放つ。ただし、 m, n は正の整数とする。光は正方形の各辺では正しく反射されるが、4つの頂点では反射されずに吸収されてしまう。

例えば点 $(2, 1)$ に向かって光を放つと、右図のように3回反射されたのちに原点に戻ってくる。しかし点 $(1, 3)$ に向かって光を放つと、右図のように点 $(1, -1)$ で吸収される。

(1) 点 $(3, 2)$ に向かって光を放つ。光が初めて原点に戻ってくるまでに、 x 軸に平行な辺で ノ 回、 y 軸に平行な辺で ハ 回反射される。

(2) 点 $(5, 3)$ に向かって光を放つ。光が点 $(\text{ヒ}, \text{フ})$ で吸収されるまでに、 x 軸に平行な辺で ヘ 回、 y 軸に平行な辺で ホ 回反射される。

(3) 光が7回反射されて初めて原点に戻ってくるとき、 $\frac{n}{m}$ のとり得る値は全部で マ 通りある。

(4) m, n を互いに素な奇数とする。点 (m, n) に向かって光を放つと、光は

$$\frac{\text{ミ}}{\text{ム}}m + \frac{\text{メ}}{\text{モ}}n + \text{ヤ}$$

回反射されたのち、ある頂点で吸収される。

