

- 1 円 $S: x^2 + y^2 = 4$ 上に 2 点 $A(-1, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}, -1)$ がある。O を原点とする。

(1) 三角形 AOB において $\angle AOB = \boxed{\text{ア}}^\circ$ である。

(2) 点 A における円 S の接線と点 B における円 S の接線との交点を C とする。C の x 座標は $\boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(3) 三角形 ABC 内に、点 D を三角形 ABD が正三角形となるようにとる。D の x 座標は $\boxed{\text{オ}} + \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(4) A, B を通る直線の方程式は $y = \boxed{\text{キ}}x + \boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(5) 不等式

$$\begin{cases} y \leq \boxed{\text{キ}}x + \boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}} \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

で表される領域の面積は $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi + \boxed{\text{シ}}$ である。

- 2 放物線 $C: y = x^2 - 2$ と x 軸上の点 $P_0(a_0, 0)$ が与えられている。
 $a_0 = 2$ とする。直線 $x = a_0$ と C との交点を Q_0 とする。 Q_0 における C の接線を ℓ とする。 ℓ が x 軸と交わる点を $P_1(a_1, 0)$ とする。直線 $x = a_1$ と C との交点を Q_1 とする。 Q_1 を通り ℓ に平行な直線が x 軸と交わる点を $P_2(a_2, 0)$ とする。以下次々にこれを繰り返す。すなわち、点 $P_k(a_k, 0)$ が定まったとき直線 $x = a_k$ と C との交点を Q_k とし、 Q_k を通り ℓ に平行な直線が x 軸と交わる点を $P_{k+1}(a_{k+1}, 0)$ とする。このとき ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{ス}} x + \boxed{\text{セ}} \quad \text{であり,} \quad a_1 = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。また

$$a_k - a_{k+1} = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} a_k^2 + \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

であり、

$$P_k Q_k + Q_k P_{k+1} = \left(\boxed{\text{ナ}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \right) (a_k^2 + \boxed{\text{ネ}})$$

となる。したがって、 n を自然数とするとき

$$\sum_{k=0}^n (P_k Q_k + Q_k P_{k+1}) = \left(\boxed{\text{ノ}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}} \right) (\boxed{\text{ヒ}} - a_{n+1})$$

である。

3 $a > 0, c$ を定数とし

$$f(x) = 3 \int_0^x (t^2 - a^2) dt + c$$

とする。

(1) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で つねに $f(x) \geq 0$ となる条件は

$$0 < a \leq \boxed{\text{フ}} \quad \text{のとき} \quad c \geq \boxed{\text{ヘ}} a^3$$

$$\boxed{\text{フ}} \leq a \quad \text{のとき} \quad c \geq \boxed{\text{ホ}} a^2 + \boxed{\text{マ}}$$

である。

(2) $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x) \geq 0$ となる x が存在する条件は

$$0 < a \leq \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ム}}} \quad \text{のとき} \quad c \geq \boxed{\text{メ}} a^2 + \boxed{\text{モ}}$$

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ム}}} \leq a \quad \text{のとき} \quad c \geq \boxed{\text{ヤ}}$$

である。