

次の□アから□ヤに当てはまる数値を答えよ．ただし□ソと□タには問題に指定された通りに番号で答えよ．また π は円周率とする．

- 1 $xy = 1, x > 0$ で決まる xy 平面上の曲線を C , $xy = 1, x < 0$ で決まる曲線を D とし, $a > 1$ とする. C 上の点 $P(a, \frac{1}{a})$ に最も近い D 上の点を $Q(b, \frac{1}{b})$, Q に最も近い C 上の点を $R(c, \frac{1}{c})$ とする.

- (1) $b = \frac{\text{□イ}}{\text{□ア}} a^{\frac{\text{□ウ}}{\text{□ア}}}$ である.

- (2) 線分 PR と曲線 C で囲まれる部分の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \left(a^{\frac{\text{□エ}}{\text{□オ}}} - a^{\frac{\text{□エ}}{\text{□オ}}} \right) - \log a^{\frac{\text{□カ}}{\text{□キ}}}$$

である.

- (3) $R_0 = R$ とおく. 曲線 C 上の点 R_1 を, その点での C の接線の傾きが線分 PR_0 の傾きに等しくなるように定める. 以下帰納的に曲線 C 上の点 R_n を, その点での C の接線の傾きが, 線分 PR_{n-1} の傾きに等しくなるように定める. R_n の x 座標 x_n を R の x 座標 c を用いて $x_n = c^{t_n}$ と表すと

$$t_n = \frac{\frac{\text{□ク}}{2^{\frac{\text{□ケ}}{n}}}}{\text{□コ}} + \frac{\text{□コ}}{2^{\frac{\text{□ケ}}{n}}}$$

である.

2 ソ, タ には下記の選択肢の中から適当なものを選んで, その番号で答えよ.

列ベクトル

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

に対して,

$$A_{X,Y} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \Delta_{X,Y} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

と定義する.

(1) 行列

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$\Delta_{X,BY} + \Delta_{BX,Y} = \Delta_{X,Y} (\text{ソ} a + \text{タ} b + \text{チ} c + \text{リ} d)$$

である.

(2) $\Delta_{X,BY} + \Delta_{BX,Y} = 0$ であり, 行列 $A_{X,Y}$ が逆行列をもつものとする. このとき

$$B^2 = \begin{pmatrix} \text{ソ} & \text{タ} \\ \text{タ} & \text{ソ} \end{pmatrix}$$

である. さらに B の成分はすべて整数であって

$$\text{ソ} = 1, 0 \leq a \leq 3, bc \neq 0$$

であるとする. このような行列 B は チ 通りある.

選択肢:

- (1). 0, (2). 1, (3). -1, (4). $bc + a^2$, (5). $-bc - a^2$, (6). $bc - a^2$,
(7). $-bc + a^2$

3 赤，青，緑の玉がそれぞれ2個ずつ入った中の見えない袋がある．2人の人がそれぞれこのような袋を持ち1回に1個ずつ玉を取り出す．ただし取り出した玉はもとに戻さないものとする．

(1) 一方の人が6個の玉を全部取り出す取り出し方は， $\boxed{\text{ツ}}$ 通りある．ただし同じ色の玉は区別しない．

(2) 2人の1回目に取り出した玉の色が同じであったとき，2人の2回目に取り出す玉の色がまた同じである確率は $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

(3) 2人の1回目に取り出した玉の色が異なっていたとき，2人の2回目に取り出す玉の色が同じである確率は $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である．

(4) 1回目も2回目も2人の取り出した玉の色が同じであったとき，3回目もまた同じである確率は $\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である．

- 4 ある光源が xy 平面の原点に置かれている．平面上の点 $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ ($r > 0, |\alpha| \leq \pi$) には, $|\alpha| \leq \frac{\pi}{4}$ ならば光があたっていてその明るさは

$$\frac{1}{r^2} \cos 2\alpha$$

であり, $|\alpha| > \frac{\pi}{4}$ ならば光はあたっていない．

この平面の, 点 $A(-1, 0)$ を中心とする半径 a ($a > 1$) の円周上を, 点 P が一定の速さで反時計回りに動いていて, 単位時間あたり a だけ進んでいる．時刻 $t = -t_0$ のときに点 P に光があたり始め, $t = 0$ のとき $(a - 1, 0)$ の位置にあり, $t = t_0$ のときに光があたらなくなったとする．

- (1) t_0 は次の式をみたす．

$$\sin\left(\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}\pi - t_0\right) = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}a^{\boxed{\text{フ}}}$$

ただし $0 < \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} < \frac{1}{2}$ とする．

- (2) 時刻 t のとき, 原点と点 P を結ぶ直線が x 軸となす角を α とすると

$$a \sin(\boxed{\text{ヘ}}\alpha - t) = \sin(\boxed{\text{ホ}}\alpha + \boxed{\text{マ}}t)$$

である．

- (3) $|t| \leq t_0$ のとき, 時刻 t における点 P の位置の明るさは次の式で与えられる．

$$\frac{1}{(1 + a^2 - 2a \cos t)^2} (\boxed{\text{ミ}} a^2 \cos^2 t + \boxed{\text{ム}} a \cos t + \boxed{\text{メ}} a^2 + \boxed{\text{モ}} a + \boxed{\text{ヤ}})$$