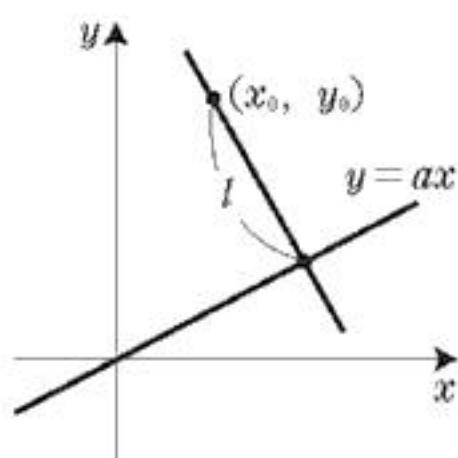


$$\boxed{1} \quad l(x_0, y_0) = \frac{|ax_0 - y_0|}{\sqrt{1+a^2}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) ここで (x_0, y_0) を通る $y=ax$ に直交する直線は $ay = -(x-x_0) + ay_0 \quad \cdots \textcircled{2}$



これと $y=ax$ との交点は、 $\textcircled{2}$ に代入して

$$\left(\frac{x_0 + ay_0}{1+a^2}, \frac{a(x_0 + ay_0)}{a^2 + 1} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore l^2(x_0, y_0) &= \left(\frac{x_0 + ay_0}{a^2 + 1} - x_0 \right)^2 + \left(\frac{ax_0 + a^2y_0}{a^2 + 1} - y_0 \right)^2 \\ &= \frac{a^2x_0^2 - 2ax_0y_0 + y_0^2}{a^2 + 1} = \frac{(ax_0 - y_0)^2}{\sqrt{a^2 + 1}^2} \end{aligned}$$

$$\therefore l(x_0, y_0) = \frac{|ax_0 - y_0|}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (\because l > 0)$$

(2)

$$(i) \quad a=1 \text{ のとき } 0 < \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} < \frac{2\sqrt{2}}{x+y}$$

右辺より

$$|x-y|(x+y)^2 - 4(x+y) < 0$$

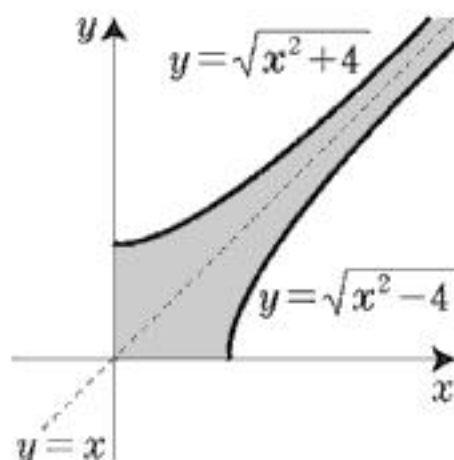
$$x > y \text{ のとき, } (x+y)(x^2 - y^2 - 4) < 0$$

$$x = y \text{ のとき, 左辺より } 0 < \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \text{ を}$$

満たさない。

$$x < y \text{ のとき, } (x+y)(y^2 - x^2 - 4) < 0$$

よって、求める領域は右図（ただし境界線上と $y=x$ 上を含まない）



(ii) 有理数 a を $a = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素の整数) とおくと、

$$\text{*式} \quad \text{左辺より} \quad \left| \frac{n}{m}x - y \right| = \frac{1}{m} |nx - my| \neq 0$$

$$\text{よって} \quad \frac{|ax - y|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{|nx - my|}{m\sqrt{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

($\because m, n, x, y$ は整数)

$$\text{よって} \quad \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}} < \frac{|ax - y|}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{2\sqrt{2}}{x+y}$$

$$x+y > 0 \text{ より } 0 < x+y < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

よって、*式を満たす整数 (x, y) は有限個である

(1) 鎖の始めは $1 \sim l$ までのどれでもよく、鎖の終わりは $m \sim n-1$ までのどれでもよいので、 $l(n-m)$ 個

(2) z_k を含む鎖の総和 S について、

$$\begin{cases} k < l \text{ の時, } z_l \text{ を含む鎖は } k(n-l) \text{ 個} \\ k \geq l \text{ の時, } z_l \text{ を含む鎖は } l(n-k) \text{ 個} \end{cases}$$

$$\text{よって, } S = \sum_{k=1}^{l-1} k(n-l)z_k + \sum_{k=l}^{n-1} l \cdot (n-k)z_k$$

(i) $n=2l$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^l kl \cdot z_k - l^2 z_l + \sum_{k=1}^{2l} l(2l-k)z_k \\ &= \sum_{k=1}^l k \cdot l z_k + l^2 + \sum_{k=1}^l lk z_{2l-k} \\ &= l \sum_{k=1}^l k(z_k + z_{2l-k}) + l^2 \\ &= l \sum_{k=1}^l k \left(2 \cos \frac{k\pi}{l} \right) + l^2 \end{aligned}$$

よって、 S は実数である。

(ii) $2l < n$ のとき、 S の虚部を iQ とすると

$$Q = \sum_{k=1}^{l-1} kl \cdot \sin \frac{2k}{n} \pi + \sum_{k=l}^{n-1} l(n-k) \sin \frac{2k}{n} \pi$$

(I) n が奇数のとき、 $n=2a+1$ とおくと ($a \geq 0$)

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^{l-1} k(2a+1-l) \sin \frac{2k\pi}{2a+1} + \sum_{k=l}^a l(2a+1-k) \sin \frac{2k\pi}{2a+1} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{l-1} l(2a+1-k) \sin \frac{2k\pi}{2a+1} + \sum_{k=2a-l+2}^{2a} l(2a+1-k) \sin \frac{2k\pi}{2a+1} \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} k(2a-1-2l) \sin \frac{2k\pi}{2a+1} + \sum_{k=l}^a l(2a+1-2k) \sin \frac{2k\pi}{2a+1} \end{aligned}$$

ここで、 $2l < n$ より $2a-1-2l \geq 0$, $0 \leq \sin \frac{2k\pi}{2a+1} < 1$,

$2a+1-a \geq 0$, より $Q > 0$ がいえる。

(II) n が偶数のとき、 $n=2a$ とおくと

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=1}^{l-1} k(2a-l) \sin \frac{2k}{2a} \pi + \sum_{k=l}^a l(2a-k) \sin \frac{2k\pi}{2a} \\ &\quad + l(2a-a) \sin \frac{2a}{2a} \pi + \sum_{k=a+1}^{2a-l} l(2a-k) \sin \frac{2k\pi}{2a} \\ &\quad + \sum_{k=2a-l+1}^{2a-1} l(2a-k) \sin \frac{2k\pi}{2a} \\ &= \sum_{k=1}^{l-1} 2k(a-l) \sin \frac{k\pi}{a} + \sum_{k=l}^{a-1} 2l(a-k) \sin \frac{k}{a} \pi \end{aligned}$$

ここで、 $2l < n=2a$ より $a-l > 0$, $\sin \frac{k\pi}{a} > 0$, $a-k > 0$

よって、 $Q > 0$ がいえる。

(I), (II)により題意は示された。

[3]

$$(1) \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad 2a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1 \quad (n \geq 0)$$

$$2a_2 = a_1 \cdot a_1 = \frac{1}{4} \quad \therefore a_2 = \frac{1}{8}$$

題意を数学的帰納法で示す。

$$(i) \quad k=2 \text{ のとき, } a_2 = \frac{1}{2 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \text{ となり成り立つ。}$$

$$(ii) \quad (a) \quad a_k = \frac{1}{2k} (1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{k-1}) \quad \text{このとき,}$$

$$A = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2a_1$$

$$= \sum_{k=2}^n 2a_k$$

$$= a_1^2 + (a_2a_1 + a_1a_2) + \cdots + (a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_n + a_1) \\ (\because 2a_i = a_1a_{i-1} + \cdots + a_{i-1}a_1)$$

$$= a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}) + \cdots$$

$$= (A \text{ の定義式の右辺})$$

$$\text{よって, } A = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2a_1 \text{ を示せる。} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(b) \quad k \leq n \text{ について} * \text{ が成り立つとすると}$$

$$a_k \frac{1}{2k} (1 - a_1 - \cdots - a_{k-1}) \quad (k \leq n) \quad \text{このとき,}$$

$$1 - (a_1 + \cdots + a_{k-1}) = 2ka_k \iff a_1 + \cdots + a_{k-1} = 1 - 2ka_k$$

また,

$$A = a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

$$+ a_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2})$$

$$+ \vdots$$

$$+ a_{n-1}a_1$$

$$= a_1(1 - 2na_n) + a_2(1 - 2(n-1)a_{n-1}) + \cdots + a_n(1 - 2a_1)$$

$$= (a_1 + \cdots + a_n) - 2(na_1a_n + (n-1)a_2a_{n-1} + \cdots + 1a_na_1) - **$$

ここで, 定義より

$$2a_{n+1} = a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_1a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_1a_n}{2}$$

$$\text{また, } na_1a_n + (n-1)a_2a_{n-1} + \cdots + 1a_na_1$$

$$+) \quad 1a_na_1 + \quad 2a_{n-1}a_2 + \cdots + na_1a_n$$

$$\frac{(n+1)(a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1)}{\quad} \quad \text{より}$$

$$** \text{ は, } (a_1 + \cdots + a_n) - 2(n+1) \frac{a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_1a_n}{2}$$

$$= (a_1 + \cdots + a_n) - 2(n+1)a_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$(iii) \quad \text{よって, } k=n+1 \text{ のとき, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2a_1 = (a_1 + \cdots + a_n) - 2(n+1)a_{n+1}$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2} \text{ を代入して } 1 - (a_1 + \cdots + a_n) = 2(n+1)a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \{ 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) \} \text{ となり,}$$

* 式は成り立つ。

よって, 数学的帰納法により * は示された。

$$(2) \quad * \text{ より}$$

$$2na_n = 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

$$= 1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_n$$

$$= 2(n+1)a_{n+1} + a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{2n-1}{2(n+1)} a_n$$

$$\text{よって } a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$(3)$$

$$a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} = \frac{2n-3}{2n} \cdot \frac{2n-5}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot a_1$$

$$= \frac{(2n-3)!}{2^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot 2^n \cdot n!} \quad (n \geq 2)$$

$$= \frac{(2n-3)!}{2^{2n-2} \cdot (n-2)! \cdot n!} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{また, } a_1 = \frac{1}{2}$$