

(2004年度)

## 8 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ，4問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が，次の2，3ページにある。試験開始3分前に監督からの指示があるので，それに従って読むこと。

## 受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

## マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。(0 または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

| 符号 | 10 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |
|----|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| －  | 0      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z | 0 | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z |   |  |
| ○  | ●      | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○     | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | ○ | ○ | ○ | ○ |  |

〔解答記入例 -26〕

| 符号 | 10 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1 の 位 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|----|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|
| －  | 0      | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z | 0 | 1     | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Z |  |  |
| ●  | ○      | ○ | ● | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○     | ○ | ○ | ○ | ○ | ● | ○ | ○ | ○ | ○ |  |  |

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$  を、 $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$  とする。

0 を、 $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$  とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$  を、 $\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} \sqrt{\boxed{\phantom{00}}}$  にあてはめる場合  $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$  とする。

次の  $\boxed{\text{ア}}$  から  $\boxed{\text{ワ}}$  に当てはまる数値を答えよ．ただし， $\pi$  は円周率とする．

**1**

(1) 次の漸化式を満たす数列  $\{a_n\}$  を考える．

$$a_n = a_{n+2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  であるとする．このとき，次の式が成り立つ．

$$a_n = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \left( \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

(2) 座標平面上を運動する点  $P$  がある．点  $P$  は原点  $(0, 0)$  を出発し，曲線  $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$  ( $x \geq 0$ ) 上を毎秒 1 の速さで動いているとする．原点を出発してから  $t$  秒後の点  $P$  の座標を  $(x(t), y(t))$  とすると，次の関係式

$$\sqrt{x(t) + \boxed{\text{キ}}} \frac{dx(t)}{dt} = \boxed{\text{ク}}$$

が成り立つ．点  $P$  の  $x$  座標が 3 になるのは，原点を出発してから  $t_0$  秒後であるとする． $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$  の時刻  $t = t_0$  での値は  $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$  であり， $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$  の時刻  $t = t_0$  での

値は  $\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$  である．よって，時刻  $t = t_0$  のときの点  $P$  の加速度の大きさは  $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$  である．

2

座標空間において、原点  $O(0, 0, 0)$ 、点  $P(1, 0, 1)$ 、点  $Q(2, 1, 0)$  を頂点とする三角形  $OPQ$  を考える。  $0 \leq t \leq 1$  のとき、点  $(0, t, 0)$  を通り  $xz$  平面に平行な平面  $H$  と辺  $PQ$  が交わる点の座標は  $(\boxed{\text{ソ}} + t, t, \boxed{\text{タ}} + \boxed{\text{チ}}t)$  であり、平面  $H$  と辺  $OQ$  が交わる点の座標は  $(\boxed{\text{ツ}}t, t, 0)$  である。三角形  $OPQ$  を  $y$  軸のまわりに回転したときの回転体の体積は  $\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \pi$  である。この回転体上の点で、 $z$  軸上の点  $(0, 0, \frac{5}{2})$  に最も近い点の座標は  $(0, \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}, \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}})$  である。

### 3

各チームに攻撃度  $n$  (ただし  $n = 1, 2, 3$ ) が決まっている競技を考える。攻撃度  $a$  のチーム  $A$  と攻撃度  $b$  のチーム  $B$  が試合をしたとき、

- $A$  は  $a$  回攻撃し、 $B$  は  $b$  回攻撃するとし、
- $A$  のそれぞれの攻撃が成功する確率は  $\frac{b}{3}$  であり、
- $B$  のそれぞれの攻撃が成功する確率は  $\frac{a}{3}$  である

とする。攻撃の成功回数を得点とし、得点の多いチームが勝ち、同点の場合は引き分けとする。

(1) 攻撃度が3のチームと2のチームが対戦したとき、引き分けになる確率は

$\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$  である。

(2) 攻撃度が3のチームと1のチームが対戦したとき、攻撃度3のチームが勝

つ確率は  $\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$  である。

(3) 攻撃度が3, 2, 1の3チームで総当たり戦を行うとき、攻撃度3のチームが2

勝する確率は  $\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$  であり、攻撃度2のチームが2勝する確率は  $\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$  である。ま

た、2勝する確率が最も高いのは、攻撃度  $\boxed{\text{ム}}$  のチームであり、その確率は  $\frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$  である。

4

座標空間において、原点  $O$  を中心とする、半径が 1 および 2 の球面をそれぞれ  $S_1, S_2$  とする. 点  $P$  が  $S_1$  の上を、点  $Q$  が  $S_2$  の上を  $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2}$  という条件を保って動くとする. このとき以下の問に答えよ.

(1) 与えられた点  $P = (x, y, z)$  に対して、上の条件を満たす点  $Q$  の全体は半径  $r = \frac{\sqrt{\text{ヤ}}}{\text{ユ}}$  の円  $C$  をなす. この円  $C$  とその内部を底面とし点  $P$  を頂点とする円

錐の側面 (底面は入れない) の面積は  $\frac{\sqrt{\text{ヨ}}}{\text{ラ}}\pi$  である.

(2) 円  $C$  の中心を  $R$  とし、 $\frac{1}{r}\overrightarrow{RQ} = (u, v, w)$  とする.  $P = (0, 0, 1)$  のとき、 $w = \text{リ}$  である. また点  $P$ , 点  $Q$  に対して関数  $f(P, Q)$  を

$$f(P, Q) = z + v + (zv - yw)$$

と定義する.  $P = (0, 0, 1)$  の条件の下では  $f(P, Q)$  の最大値は  $\text{ル}$ , 最小値は  $\text{レ}$  である.

(3) 関数  $f(P, Q)$  の最大値を求めたい. まず不等式

$$|zv - yw| \leq \text{ロ}$$

が成り立つことに注意する. ただし、上の  $\text{ロ}$  には、不等式を成り立たせる最小の整数を入れる. 次に、この不等式と (2) における考察を考慮すると、求める  $f(P, Q)$  の最大値は  $\text{ワ}$  であることが分かる.