

(2004年度)

7 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は7ページ, 4問である。)

「受験についての注意」「マークによる数値解答欄についての注意」が, 次の2, 3ページにある。試験開始3分前に監督からの指示があるので, それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の右側のミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
5. 解答は解答用紙の各問の選択肢の中から正解と思うものを選んで、そのマーク欄をぬりつぶすこと。その他の部分には何も書いてはいけない。
6. 筆記具は、HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシルに限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
7. マークをするとき、枠からはみ出したり、枠のなかに白い部分を残したり、文字や番号、枠などに○や×をつけたりしてはならない。
8. 訂正する場合は、消しゴムでていねいに消すこと。消しくずはきれいに取り除くこと。
9. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
10. 試験時間中に退場することはできない。
11. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
12. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

マークによる数値解答欄についての注意

解答欄の各位の該当する数値の欄にマークせよ。その際、はじめの位の数が0のときも、必ずマークすること。

符号欄がもうけられている場合には、解答が負数の場合のみ－にマークせよ。
(0または正数の場合は、符号欄にマークしない。)

分数は、既約分数で表し、分母は必ず正とする。また、整数を分数のかたちに表すときは、分母を1とする。

根号の内は、正の整数であって、2以上の整数の平方でわりきれないものとする。

解答が所定欄で表すことができない場合、あるいは二つ以上の答が得られる場合には、各位の欄ともZにマークせよ。(符号欄がもうけられている場合、－にはマークしない。)

〔解答記入例 7〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○		

〔解答記入例 -26〕

符号	10 の 位												1 の 位											
－	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z		
●	○	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	

〔解答表示例〕

$-\frac{3}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-3}}{\boxed{2}}$ とする。

0 を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{0}}{\boxed{1}}$ とする。

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ を、 $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \sqrt{\boxed{}}$ にあてはめる場合 $\frac{\boxed{-1}}{\boxed{2}} \sqrt{\boxed{3}}$ とする。

次の $\boxed{\text{ア}}$ から $\boxed{\text{ワ}}$ に当てはまる数値を答えよ。 $\boxed{\text{あ}}$ には与えられた選択肢の中から適当なものを選んで番号で答えよ。また π は円周率とする。

1

xy 平面に、原点を中心とし、半径が $1, r$ ($0 < r < 1$) の同心円がある。この円周上を動いている2つの点 $P(\cos t, \sin t)$, $Q(r \cos 2t, r \sin 2t)$ を考える。ここで t は時間である。長さ $\overline{PQ}$ が最大値をとるのは $\cos t = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ のときである。以下、 P, Q を通る直線 ℓ が y 軸と平行でないときのみを考える。このとき直線 ℓ が x 軸の正の方向となす角を θ とする ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)。 $\tan \theta$ を t で微分することにより、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\boxed{\text{ウ}} + \boxed{\text{エ}} r^2 + \boxed{\text{オ}} r \boxed{\text{あ}}}{1 + r^2 - 2r \cos t}$$

が得られるので、 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ となるのは $\cos t = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} r + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \frac{1}{r}$ のときのみであることが分かる。したがって、 $\frac{d\theta}{dt} = 0$ となる t が存在するための必要十分条件は

$$\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \leq r \text{ である。}$$

選択肢：

- (1) $\cos t$ (2) $\sin t$ (3) $\cos 2t$ (4) $\sin 2t$ (5) $\tan t$ (6) $\tan 2t$

2

xyz 空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$ を考える.

- (1) 3 点 A, B, C を通る平面に垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ は

$$\vec{n} = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \left(1, \boxed{\text{セ}}, \sqrt{\boxed{\text{ソ}}} \right)$$

と表される. ただし, $\boxed{\text{シ}} > 0$ とする.

- (2) 線分 OC 上の点 $P(0, 0, z)$ から 3 点 A, B, C を通る平面に下ろした垂線の足を H とする. このとき, 線分 PH の長さは

$$\overline{PH} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}} (\boxed{\text{ツ}} - z)$$

と表される.

- (3) また, (2) で定めた点 P から 3 点 O, A, B を通る平面に下ろした垂線の足を H' とする. このとき, $S = \overline{PH}^2 + \overline{PH'}^2$ とおくと,

$$S = \frac{1}{4} (\boxed{\text{テ}} z^2 + \boxed{\text{ト}} z + \boxed{\text{ナ}})$$

と表される. 点 P が 線分 OC 上を動くとき, S の最小値は $\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である.

3

複素数平面上の点 $z = x + yi$ に対し

$$f(z) = \begin{cases} \left| \frac{z}{|z|} + |z| \right| & (z \neq 0) \\ 1 & (z = 0) \end{cases}$$

とおく. ただし, i は虚数単位を表す.

(1) $f(z) < 3$ である z の範囲は中心 $\boxed{\text{ネ}} + \boxed{\text{ノ}}i$, 半径 $\boxed{\text{ハ}}$ の円の内部である.

(2) $|z| < f(z)$ である z の範囲は $\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}} < x$ である.

(3) $3|z| < f(z)$ である z の範囲は中心 $\frac{1}{\boxed{\text{ヘ}}} + \boxed{\text{ホ}}i$, 半径 $\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ の円の内部である.

4

次のように定積分で表された関数

$$F(x) = \frac{1}{16} \int_0^4 |t(t-2x)| dt$$

を考える.

(1) $F(x)$ は

$$\begin{aligned} x \leq \boxed{\text{ム}} \text{ のとき} & \quad \boxed{\text{モ}} x + \frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}, \\ \boxed{\text{ム}} \leq x \leq \boxed{\text{メ}} \text{ のとき} & \quad \frac{1}{6} \left(\boxed{\text{ヨ}} x^3 + \boxed{\text{ラ}} x + \boxed{\text{リ}} \right), \\ \boxed{\text{メ}} \leq x \text{ のとき} & \quad \boxed{\text{ル}} x + \frac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}} \end{aligned}$$

となる.

(2) $0 \leq x \leq 3$ における $F(x)$ は $x = \boxed{\text{ワ}}$ のとき 最大値をとり, $x = \sqrt{\boxed{\text{ヲ}}}$ のとき 最小値をとる.