

(2004年度)

10 数 学 問 題 (90分)

(この問題冊子は6ページ，3問である。)

「受験についての注意」が次ページにある。試験開始3分前に監督からの指示があるので，それに従って読むこと。

受験についての注意

1. 監督の指示があるまで、次のページを開いてはならない。
2. 携帯電話・PHSの電源は切ること。
3. 試験開始前に、監督から指示があったら、解答用紙の右上の番号が自分の受験番号かどうかを確認し、氏名を記入すること。次に、解答用紙の**右側のみ**ミシン目にそって、きれいに折り曲げてから、受験番号と氏名とが書かれた切片を切り離し、机上に置くこと。
4. 左側のミシン目は切り離してはならない。
5. 監督から試験開始の合図があったら、この問題冊子が、表紙に記したページ数どおりそろっているかどうか確かめること。
6. 各問題に対する解答は、その問題番号が記された解答用紙に記入すること。
足りない場合は、その解答用紙の裏面に記入してよい。その他の部分には、何も書いてはいけない。
7. マーク式解答用紙には何も記入しないこと。
8. 解答用紙を、切り離してはいけない。採点が不可能になる。
9. 筆記具は、**HBの黒鉛筆とHBのシャープペンシル**に限る。万年筆・ボールペンなどを使用してはいけない。時計に組み込まれたアラーム機能、計算機能、辞書機能などを使用してはいけない。
10. 解答用紙を折り曲げたり、破ったりしてはいけない。採点が不可能になる。
11. 試験時間中に退場することはできない。
12. 解答用紙を持ち帰ってはならない。
13. 問題冊子、計算用紙は必ず持ち帰ること。

◎ この問題冊子の余白を計算用紙として使用してよい。

1

- (1) a は実数とし, xy 平面の直線 $y = ax$ と点 $P(x_0, y_0)$ の距離を $\ell(x_0, y_0)$ とすると

$$\ell(x_0, y_0) = \frac{|ax_0 - y_0|}{\sqrt{1 + a^2}}$$

であることを証明せよ.

- (2) 以下 $x > 0, y > 0$ の範囲で次の不等式を考える.

$$0 < \frac{|ax - y|}{\sqrt{1 + a^2}} < \frac{2\sqrt{2}}{x + y} \quad (*)$$

- (i) $a = 1$ のとき $(*)$ で定義される xy 平面上の領域を図示せよ.
(ii) a が有理数のとき $(*)$ をみたす整数の組 (x, y) は有限個であることを示せ.

2 自然数 n に対して $n-1$ 個の複素数

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

を考える. ただし i は虚数単位を表し π は円周率である. このとき,

$$\{z_r, z_{r+1}, \dots, z_s\}$$

という型の集合を鎖と呼ぶ. ここで $1 \leq r \leq s \leq n-1$ である. また, 鎖に含まれる全ての複素数の和を, 鎖の重さとよぶ.

- (1) $1 \leq \ell < m \leq n-1$ のとき, z_ℓ と z_m を共に含む鎖の個数を求めよ.
- (2) ℓ を固定し z_ℓ を含む鎖の重さの総和を S とする.
 - (i) n が偶数で $n = 2\ell$ のとき, S は実数であることを示せ.
 - (ii) $2\ell < n$ のとき, S の虚部は, 正であることを示せ.

3 数列 a_n を

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad 2a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1 \quad (n \geq 2)$$

で定義する.

(1)

$$a_k = \frac{1}{2k}(1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{k-1}) \quad (k \geq 2) \quad (*)$$

であることを以下の順により, 帰納法で示せ.

(i) $k = 2$ のとき $(*)$ は成り立つ.

(ii) $n \geq 2$ とし,

$$\begin{aligned} A &= a_1(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}) \\ &\quad + a_2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n-2}(a_1 + a_2) \\ &\quad + a_{n-1}a_1 \end{aligned}$$

とおく.

(a) a_n の定義式を用いて

$$A = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2a_1$$

であることを示せ.

(b) $k = 2, 3, \dots, n$ に対して $(*)$ が成り立つと仮定して

$$A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - 2(n+1)a_{n+1}$$

であることを示せ.

(iii) $(*)$ が $k = n+1$ に対して成り立つことを示せ.

(2)

$$a_n = \frac{2n-3}{2n}a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

であることを示せ.

(3) a_n を求めよ.